

Série A, 1797

N° D'ORDRE :

2663

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Hervé FABRE

Aide-astronome à l'Observatoire de Nice

1^{re} THÈSE. — LES MOUVEMENTS RÉCURRENTS EN MÉCANIQUE CÉLESTE,
ET LA VARIATION DES ÉLÉMENTS DES ORBITES.

2^e THÈSE. — VARIATIONS DE LA DENSITÉ A L'INTÉRIEUR DE LA TERRE.

Soutenues le

1938, devant la Commission d'Examen.

24 MAI 1938

MM. ESCLANGON

Président.

CHAZY

LAMBERT

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1938

Série A, 1797

N° D'ORDRE :
2663

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Hervé FABRE

Aide-astronome à l'Observatoire de Nice

1^{re} THÈSE. — LES MOUVEMENTS RÉCURRENTS EN MÉCANIQUE CÉLESTE,
ET LA VARIATION DES ÉLÉMENTS DES ORBITES.

2^e THÈSE. — VARIATIONS DE LA DENSITÉ A L'INTÉRIEUR DE LA TERRE.

Soutenues le

1938, devant la Commission d'Examen.

MM. ESCLANGON	<i>Président.</i>
CHAZY	} <i>Examineurs.</i>
LAMBERT	

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i>	H. LEBESGUE.	FREUNDLER.	VESSIOT.	Charles FABRY.
	A. FERNBACH.	AUGER.	P. PORTIER.	Léon BERTRAND.
	Émile PICARD.	BLAISE.	M. MOLLIARD.	WINTREBERT.
	Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	L. LAPICQUE.	O. DUBOSCQ.
	GUILLET.	LESPIEAU.	G. BERTRAND.	BOHN.
	PÉCHARD.	MARCHIS.	H. ABRAHAM.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	†	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	M ^{me} RAMART-LUCAS.	†	Chimie organique.
G. URBAIN.....	†	Chimie générale.	H. BÉGHIN.....	†	Mécanique physique et expérimentale.
Émile BOREL.....	†	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	FOCH.....		Mécanique expérimentale des fluides.
Jean PERRIN.....	†	Chimie physique.	PAUTHENIER.....		Physique (P. C. B.).
E. RABAUD.....	†	Géométrie supérieure.	De BROGLIE.....	†	Théories physiques.
A. COTTON.....	†	Recherches physiques.	CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.
J. DRACH.....	†	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	P. JOB.....		Chimie générale.
Charles PÉREZ...	†	Zoologie.	LABROUSTE.....		Physique du Globe.
E. RABAUD.....	†	Biologie expérimentale.	PRENANT.....	†	Anatomie et Histologie comparées.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.	VILLEY.....		Mécanique physique et expérimentale.
Paul MONTEL.....	†	Théorie des fonctions et théorie des transformations.	COMBES.....	†	Physiologie végétale.
L. BLARINGHEM...	†	Botanique.	GARNIER.....	†	Mathématiques générales.
G. JULIA.....	†	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	PÉRES.....		Mécanique théorique des fluides.
C. MAUGUIN.....	†	Minéralogie.	HACKSPILL.....		Chimie (P. C. B.).
A. MICHEL-LÉVY...	†	Pétrographie.	LAUGIER.....	†	Physiologie générale.
H. BÉNARD.....	†	Mécanique expérimentale des fluides.	TOUSSAINT.....		Technique Aéronautique.
A. DENJOY.....	†	Application de l'analyse à la Géométrie.	M. CURIE.....		Physique (P. C. B.).
L. LUTAUD.....	†	Géographie physique et Géologie dynamique.	G. RIBAUD.....	†	Hautes températures.
Eugène BLOCH...	†	Physique.	CHAZY.....	†	Mécanique rationnelle.
G. BRUHAT.....	†	Physique théorique et Physique Céleste.	GAULT.....		Chimie (P. C. B.).
E. DARMOIS.....	†	Enseignement de Physique.	CROZE.....		Recherches physiques.
A. DEBIERNE.....	†	Physique générale et Radio-activité.	DUPONT.....	†	Théories chimiques.
A. DUFOUR.....	†	Physique (P. C. B.).	LANQUINE.....	†	Géologie structurale et Géologie appliquée.
L. DUNOYER.....	†	Optique appliquée.	VALIRON.....		Mathématiques générales.
A. GUILLIERMOND.	†	Botanique.	BARRABÉ.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
M. JAVILLIER.....	†	Chimie biologique.	MILLOT.....		Biologie animale (P. C. B.).
ROBERT-LÉVY.....	†	Physiologie comparée.	F. PERRIN.....		Théories physiques.
F. PICARD.....		Zoologie (Évolution des êtres organisés).	VAVON.....		Chimie organique.
Henri VILLAT....	†	Mécanique des fluides et applications.	G. DARMOIS.....		Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
Ch. JACOB.....	†	Géologie.	CHATTON.....	†	Biologie maritime.
P. PASCAL.....	†	Chimie minérale.	AUBEL.....		Chimie biologique.
M. FRÉCHET.....	†	Calcul différentiel et Calcul intégral.	Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
E. ESCLANGON...	†	Astronomie.	M ^{me} JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radio-activité.
			PLANTEFOL.....		Biologie végétale (P.C.B.).
			CABANNES.....		Enseignement de Physique.
			GRASSÉ.....		Biologie animale (P.C.B.).
			PRÉVOST.....		Chimie (P.C.B.).

Secrétaire..... A. PACAUD.
Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



A

MONSIEUR PAUL BRENAC

PRÉSIDENT DE LA CHAMBRE DE COMMERCE DE MAZAMET



Digitized by the Internet Archive
in 2026

PREMIÈRE THÈSE.

LES MOUVEMENTS RÉCURRENTS

EN MÉCANIQUE CÉLESTE,

ET LA VARIATION DES ÉLÉMENTS DES ORBITES.

INTRODUCTION.

Le problème de la stabilité du système solaire, que l'on pouvait croire résolu à l'époque de Lagrange, Laplace et Poisson, se posa de nouveau, un demi-siècle plus tard, lorsque Haretu découvrit des termes en t^2 dans les perturbations des grands axes des orbites planétaires, en tenant compte des troisièmes puissances des masses perturbatrices. Les approximations antérieures, qui ne dépassaient pas le second ordre, étaient donc insuffisantes. En poussant plus loin les calculs, et même en utilisant les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, il fallut conclure à l'impossibilité d'établir l'invariabilité des éléments moyens des orbites. Cette invariabilité peut, cependant, être admise pour un très grand nombre d'années ⁽¹⁾, en vertu des théorèmes classiques de Lagrange, Laplace et Poisson; et pour donner à ces derniers un sens mathématique autre que celui d'un calcul formel, on arriva à penser qu'en parlant des orbites réelles des planètes, on pourrait déterminer, en changeant très peu les conditions initiales, des orbites théoriques absolument stables, c'est-à-dire dont le grand axe, l'excentricité et l'inclinaison auraient des valeurs moyennes constantes

⁽¹⁾ Ce nombre semble être de l'ordre du milliard en ce qui concerne les orbites des grosses planètes. Il est à noter que l'on fait abstraction des causes physiques : variation des masses du Soleil et des planètes, pression de radiation, marées, etc.

dans le passé et dans l'avenir. Gylden imagina ainsi, dans des champs de gravitation simplifiés, des « orbites intermédiaires » qui répondaient bien à ces trois conditions, mais s'écartaient trop, en général, des orbites réelles, puis il fonda la théorie des « orbites absolues ».

Une « orbite absolue » est, suivant Gylden, une trajectoire affectée des inégalités séculaires et des inégalités à longues périodes, et telle que les coordonnées de la planète décrivant cette trajectoire s'expriment analytiquement, en fonction de la longitude ou du temps, par des séries de Fourier généralisées, douées de la convergence absolue et uniforme. Les méthodes de Gylden pour établir l'existence des orbites absolues sont basées, entre autres principes, sur la stabilité des solutions des équations différentielles de la forme

$$\frac{d^2 x}{dv^2} + Q(v)x = 0,$$

$Q(v)$ étant une fonction presque-périodique positive exprimable par une série de Fourier absolument convergente

$$Q(v) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n v + \beta_n)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, nombres quelconques). Or la démonstration de Gylden ne nous a pas paru valable ⁽¹⁾. Quant à la stabilité des solutions, nous devons la mettre en doute depuis que Poincaré, et, après lui, Strutt ⁽²⁾, ont établi l'existence de zones d'instabilité lorsque la fonction $Q(v)$ est sinusoïdale ⁽³⁾ :

$$Q(v) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos 2v.$$

Poincaré a montré, par ailleurs ⁽⁴⁾, les erreurs auxquelles peut

⁽¹⁾ GYLDÉN, *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes* (Stockholm, 1892; § 7, n° 10).

⁽²⁾ STRUTT, *Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 625-628.

⁽³⁾ Les zones d'instabilité sont au voisinage des valeurs entières de $\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}$. Or, dans beaucoup d'applications astronomiques, α_0 est voisin de 2.

⁽⁴⁾ *Acta Math.*, t. 29, 1905, p. 235-272.

conduire l'intégration approchée des équations de Gylden lorsqu'on les applique à des problèmes concrets. La conception de l'« orbite absolue », quoique très intéressante, ne peut donc pas être justifiée, dans les cas les plus généraux, si l'on s'en tient aux principes de Gylden.

Il y aurait grand intérêt à reprendre l'œuvre des dernières années de la vie de ce savant, pour chercher à en consolider les points faibles, mais c'est là une tâche immense dont la réussite est tout à fait incertaine. C'est pourquoi, ayant voulu revenir sur l'idée des « orbites absolues », nous nous sommes placé dans des conditions beaucoup plus simples que celles d'un système planétaire. Nous avons d'abord adopté le principe établi par Gauss pour le calcul des inégalités séculaires, lorsque les perturbations d'ordre supérieur au premier sont insensibles ⁽¹⁾. Le mouvement d'un corps céleste s'étudie, de cette façon, comme celui d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe, les masses attirantes étant : une masse fictive, à l'origine des coordonnées, qui remplace l'attraction du corps central, et les masses des anneaux elliptiques de Gauss qui sont substitués aux planètes troublantes. On a à considérer un champ de gravitation de même espèce si l'on veut étudier les inégalités produites par l'aplatissement d'une planète sur le mouvement d'un satellite. Un autre exemple est donné par l'astronomie stellaire : on peut envisager le mouvement d'une étoile faisant partie d'un amas globulaire comme le mouvement d'un point matériel à l'intérieur d'une masse continue ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution. Mais ces champs d'attraction ne sont évidemment pas assez généraux. Pour nous en tenir aux perturbations planétaires, il y a des cas auxquels le principe de Gauss n'est pas applicable, et il faut alors ajouter à la fonction perturbatrice déduite de ce principe des termes variables avec le temps. Il en est ainsi dans la théorie de la Lune, et dans celles des astéroïdes dont les moyens mouvements sont presque en rapport simple avec le moyen mouvement de Jupiter. Le champ de gravitation, alors, n'est plus fixe, mais nous supposons toujours

(1) Fatou avait projeté une étude analytique complète des inégalités séculaires basée sur le principe de Gauss, mais il put à peine l'ébaucher avant sa mort. Nous nous plaçons dans les champs de gravitation qu'il a déjà considérés.

que l'orbite, circulaire ou elliptique, de l'astre perturbateur, est invariable.

Nous ne considérons donc, on le voit, que des problèmes à trois degrés de liberté, dans lesquels un corps céleste est mobile sous l'action d'un potentiel dépendant des coordonnées et du temps, ou simplement des coordonnées. Les équations du mouvement sont établies dans le Chapitre I et mises sous des formes spéciales; en prenant, en particulier, la longitude de Hansen comme variable indépendante, nous arrivons à des équations plus simples que celles formées par Gylden d'après les mêmes principes. Nous indiquons ensuite, dans le Chapitre II, les divers potentiels dont nous aurons à faire usage, et nous définissons une fonction L , de valeur négative, dont le rôle est important pour l'étude du mouvement des nœuds. Une autre fonction, que nous désignons par Ψ , joue un rôle analogue dans l'étude du mouvement des apsides, et sa définition est donnée dans le Chapitre III. A ce moment-là, nous commençons à nous occuper du cas particulier où le champ de forces possède un axe de révolution et un équateur, soit qu'il y ait un seul corps attirant en forme de sphéroïde aplati, ou une masse centrale et un anneau de Gauss circulaire, ou un système de deux anneaux de Gauss circulaires; l'existence de l'intégrale des aires entraîne la réduction du problème à deux degrés de liberté, car on peut étudier séparément le mouvement relatif dans le plan méridien du corps mobile. Étant donné un champ de forces de cette espèce, si les conditions initiales sont choisies dans un domaine convenable, la trajectoire reste constamment à distance finie des masses attirantes sans jamais les rencontrer. Cette propriété que nous appelons « stabilité de Hill », fait l'objet du Chapitre IV; nous avons emprunté plusieurs propositions du Chapitre à un mémoire posthume de Fatou : *Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe*, qui fut à l'origine de nos recherches,

C'est à propos des trajectoires stables au sens de Hill, dans les champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur, que nous abordons la question des « orbites absolues ». La base de notre théorie, très différente de celle de Gylden, est constituée par les travaux récents de M. Birkhoff sur les systèmes dynamiques, travaux dont les principaux résultats se résument dans les théorèmes ci-après :

« L'ensemble des trajectoires d'un système dynamique contient un ensemble fermé de mouvements *récurrents* comprenant les mouvements périodiques, et toutes les autres trajectoires du système tendent statistiquement vers cet ensemble de mouvements récurrents. »

« La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement soit récurrent est que : étant donné un nombre positif δ , aussi petit que l'on veut, il existe un nombre positif T assez grand pour que l'arc de trajectoire décrit par le mobile entre les instants t et $t + T$ (t quelconque) possède des points distants de moins de δ de tout point de la trajectoire. »

Nous appelons « orbites absolues » toutes les trajectoires qui correspondent à des mouvements récurrents. Leur importance vient de ce que l'on peut trouver des orbites absolues différant aussi peu que l'on veut de chaque orbite réelle pendant un intervalle de temps aussi long que l'on veut. Le Chapitre V traite de la nature des orbites absolues dans les champs de forces possédant un axe de révolution et un équateur; elles sont généralement quasi-périodiques par rapport à la longitude astronomique et au temps, avec trois fréquences fondamentales. Malheureusement nous ne sommes pas en mesure de représenter les coordonnées sur une orbite absolue par des séries trigonométriques convergentes, bien que cela soit théoriquement possible. Même la mise en évidence des conditions initiales dépasse nos moyens : nous savons seulement qu'il existe des conditions initiales de mouvements récurrents dans un voisinage aussi petit que l'on veut des conditions initiales réelles.

A défaut d'une représentation exacte, nous devons nous contenter d'une représentation approchée, qui est d'ailleurs la même pour les orbites absolues et pour les orbites réelles. La méthode de M. Kryloff, que nous indiquons, est caractérisée par ceci : les séries auxquelles elle conduit pour exprimer les coordonnées sont en général divergentes, mais elles possèdent, formellement, les mêmes propriétés de quasi-périodicité que les expressions rigoureuses des coordonnées d'un point qui décrirait une orbite absolue. De plus, si l'on ne prend, dans chaque série, qu'un nombre limité de termes, on représente les coordonnées d'une manière asymptotique, et, étant donnée la quasi-périodicité de

l'ensemble des termes conservés, la solution approchée ainsi obtenue épouse l'aspect d'une solution exacte quasi-périodique qui serait issue de conditions initiales voisines des conditions initiales réelles. Cela n'aurait pas lieu avec les méthodes anciennes d'approximations successives : elles donnent, en effet, un nombre de fréquences trop élevé dès le début et qui augmente constamment avec le degré de l'approximation.

Au sujet des séries de Fourier qui représenteraient rigoureusement les coordonnées sur une orbite quasi-périodique, tout ce que nous pouvons affirmer est qu'elles convergent d'une manière absolue et uniforme et qu'elles ne procèdent généralement pas suivant les puissances du coefficient de la fonction perturbatrice. Leur détermination est un problème qui s'apparente, selon nous, à l'intégration de l'équation de Bohl

$$\frac{d^2 x}{dv^2} + Q(v)x = P(v) \quad (P, Q, \text{fonctions quasi-périodiques}).$$

En substituant une orbite absolue à l'orbite réelle, on peut exprimer les variations des éléments par des formules contenant des fonctions quasi-périodiques; nous montrons, par exemple, dans le Chapitre VI, que la longitude du nœud sur le plan de l'équateur est la somme d'un terme linéaire en t et d'une fonction quasi-périodique de t , à deux fréquences fondamentales, mais, dans la pratique, la formule rigoureuse relative à une orbite absolue sera remplacée par une formule approchée. Le terme linéaire en t a son coefficient toujours négatif, car la ligne des nœuds rétrograde continuellement quelle que soit l'orbite. Nous précisons, à ce propos, la notion de moyen mouvement et faisons voir que pour une orbite quelconque stable au sens de Hill, il existe strictement un moyen mouvement sidéral, un moyen mouvement des nœuds et un moyen mouvement des apsides, qui peuvent différer plus ou moins des moyens mouvements astronomiques correspondants, car ces derniers sont temporaires.

Nous maintenant toujours dans les champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur, nous établissons, par les méthodes de M. Birkhoff, l'existence de solutions périodiques à longues périodes pour les équations du mouvement relatif dans le plan méridien; cela est présenté dans le Chapitre VII.

L'étude de la variation des éléments des orbites, commencée au Chapitre VI à propos des nœuds et de l'inclinaison, se poursuit dans le Chapitre VIII, où nous étudions, en particulier, le terme linéaire dans l'expression approchée de la longitude du périastre. Une méthode nouvelle, que nous avons élaborée, nous permet d'affirmer que le déplacement des apsides s'effectue, en moyenne, dans le sens direct, à l'extérieur des masses attirantes, pourvu que l'excentricité de l'orbite soit au moins aussi importante que la racine carrée du coefficient de la force perturbatrice, et pourvu que l'inclinaison soit inférieure à une certaine limite dépendant de la fonction Ψ (cette limite peut être assez grande). S'il s'agit, au contraire, d'une trajectoire située à l'intérieur d'une masse attirante telle que l'anneau de Saturne, ou un amas d'étoiles, le mouvement de la ligne des apsides, sous l'influence de cette masse, est rétrograde.

Les résultats concernant les mouvements des nœuds et des apsides dans les champs de forces avec axe de révolution et équateur sont susceptibles d'extension dans les champs de forces comportant des anneaux elliptiques de Gauss, auxquels est consacré le Chapitre IX. La ligne des nœuds sur le plan de l'équateur est animée d'une vitesse moyenne négative. Pour ce qui est de la ligne des apsides, son mouvement a lieu, en moyenne, dans le sens direct, si les trois conditions suivantes sont remplies : 1° l'excentricité de l'orbite est au moins aussi importante que la racine carrée du coefficient de la force perturbatrice; 2° l'inclinaison est inférieure à une certaine limite; 3° l'excentricité propre de la planète est supérieure au produit de l'excentricité de l'anneau perturbateur par un certain coefficient. Si les deux premières conditions seulement sont remplies, le mouvement de la ligne des apsides, au lieu d'être une révolution, est une libration.

Ainsi se trouve résolu le problème du déplacement séculaire des apsides lorsque l'inclinaison de l'orbite est considérable. La méthode de Lagrange, habituellement employée jusqu'à présent, ne s'applique qu'aux faibles inclinaisons : nous retrouvons les résultats qu'elle donne en prenant comme exemple le mouvement d'un astéroïde de faible inclinaison et de faible excentricité troublé par Jupiter.

Il existe, dans les champs de forces comportant des anneaux

elliptiques de Gauss, des orbites absolues à deux et à trois fréquences fondamentales, mais il n'est pas certain que la propriété caractéristique des orbites absolues les plus générales soit la quasi-périodicité avec trois fréquences fondamentales, ou même la quasi-périodicité considérée indépendamment du nombre des fréquences (presque-périodicité). De même, dans les champs de forces dérivés de potentiels qui dépendent périodiquement du temps, on a des orbites absolues avec deux, trois ou quatre fréquences fondamentales; mais rien n'indique qu'il n'y a pas d'orbites absolues d'autres espèces, et la catégorie la plus générale des orbites absolues reste inconnue.

Nous croyons, néanmoins, avoir justifié l'idée des « orbites absolues » de la Mécanique Céleste, et défriché un peu le terrain d'étude de cette question.

En ce qui concerne les variations séculaires des orbites, les théorèmes que nous avons obtenus ne s'appliquent pas au cas où le temps figure comme variable explicite dans les termes non négligeables de la fonction perturbatrice. Les mouvements des nœuds et des apsides ne peuvent, alors, s'étudier que par des procédés de fortune, et nous en donnons un exemple, au Chapitre X, en prenant une fonction perturbatrice sinusoïdale par rapport au temps; c'est la généralisation du procédé employé par Gylden pour obtenir l'« orbite intermédiaire » de la Lune. On peut aussi, quand il y a une commensurabilité approchée simple entre les moyens mouvements des planètes troublante et troublée, se servir des solutions périodiques de première, deuxième et troisième sorte dont l'existence a été démontrée par Poincaré ⁽¹⁾ : les vitesses angulaires moyennes des nœuds et des apsides sont voisines de celles qui correspondent à la solution périodique utilisée.

Des applications diverses et simples sont traitées, çà et là, au cours du Mémoire. Signalons, en particulier, la limite de l'inclinaison, 46° , en deçà de laquelle la vitesse angulaire moyenne de la ligne des apsides est positive dans le champ d'attraction produit par un sphéroïde aplati ou par un système de deux anneaux circulaires de Gauss sur un point éloigné, ou encore dans le champ

(1) *Bull. Astr.*, 1^{re} série; t. I, p. 65.

d'attraction d'une masse centrale et d'un anneau de Gauss de très grand rayon. Le calcul a été fait en supposant l'orbite peu différente d'un cercle.

Qu'il nous soit permis, avant de clore cette Préface, de remercier : M. Fayet, qui, en tant que Directeur de l'Observatoire de Nice, nous a accordé toutes facilités pouvant favoriser nos recherches, auxquelles il s'est vivement intéressé ; M. Esclangon, Directeur de l'Observatoire de Paris, et M. Luc Picart, Directeur de l'Observatoire de Bordeaux, qui n'ont cessé de nous encourager depuis le début de notre travail ; enfin et tout spécialement M. Chazy, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, dont une longue suite de conseils, empreints de la plus grande bienveillance, nous a permis de mener notre Mémoire à bonne fin. A ces quatre maîtres va notre profonde reconnaissance.

CHAPITRE I.

FORMES SPÉCIALES AUXQUELLES PEUVENT SE RAMENER LES ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS DES CORPS CÉLESTES.

1. Notations des diverses coordonnées. — Nous aurons à utiliser :

1° Les coordonnées cartésiennes x, y, z .

2° Les coordonnées semi-polaires ρ, θ, z , telles que

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

3° Les coordonnées polaires r, θ, φ , telles que

$$\rho = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi;$$

r , rayon vecteur ; θ , longitude dans le plan xOy ; φ , latitude par rapport à ce même plan.

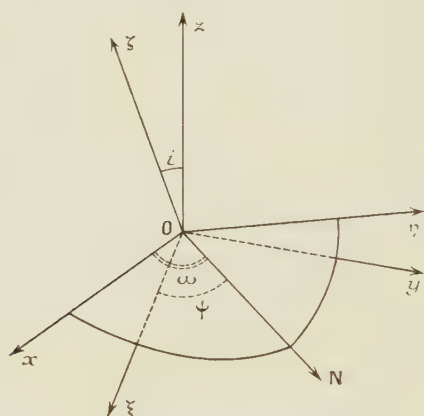
4° Les *coordonnées de Laplace* u, θ, ω , telles que

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r \cos \varphi}, \quad \omega = \frac{z}{\rho} = \tan \varphi;$$

ces coordonnées ont été employées par Laplace dans sa théorie de la Lune.

5° Les *coordonnées de Hansen*, employées par cet astronome pour le calcul des perturbations planétaires : ce sont les coordonnées polaires r, φ , dans un certain plan mobile $\xi O \eta$ (axe polaire : $O\xi$). L'angle φ sera appelé *longitude orbitale* : dénomination justifiée par la définition du plan mobile. Ce plan $\xi O \eta$ est le plan instantané déterminé par deux rayons vecteurs consécutifs, c'est-à-dire le plan tangent suivant le rayon vecteur au cône de sommet O qui passe par la trajectoire; l'axe instantané de rotation du plan $\xi O \eta$ est le rayon vecteur. Aux coordonnées de Hansen il faut adjoindre la loi du déplacement du plan instantané.

Fig. 1.



La figure ci-contre représente les axes $Ox, Oy, Oz, O\xi, O\eta, O\zeta$, ce dernier formant un trièdre trirectangle direct avec $O\xi$ et $O\eta$. ON est la ligne des nœuds du plan instantané sur le plan fixe xOy , orientée positivement vers le nœud ascendant; ω est la longitude du nœud ascendant sur le plan fixe, comptée à partir de Ox ; ψ est la longitude du même nœud sur le plan mobile, comptée à partir de $O\xi$. L'angle i de Oz avec $O\zeta$ est l'inclinaison instantanée de l'orbite.

2. Loi du déplacement du plan de Hansen. En supposant quelconque la rotation instantanée Ω du trièdre $O\xi\eta\zeta$, et en désignant par P, Q, R les projections de Ω sur $O\xi, O\eta, O\zeta$, les formules classiques de la cinématique permettent d'écrire, par un

simple changement de signe de l'angle ψ :

$$P = \frac{di}{dt} \cos \psi - \frac{d\omega}{dt} \sin \psi \sin i,$$

$$Q = \frac{di}{dt} \sin \psi + \frac{d\omega}{dt} \cos \psi \sin i,$$

$$R = -\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \cos i.$$

Les composantes de la vitesse du point mobile suivant les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont

$$V_\xi = Q\zeta - R\eta, \quad V_\eta = R\xi - P\zeta, \quad V_\zeta = P\eta - Q\xi$$

(les coordonnées ξ , η , ζ étant supposées quelconques). L'axe instantané de rotation est défini par

$$V_\xi = V_\eta = V_\zeta = 0$$

(deux équations distinctes, seulement). Pour réaliser la coïncidence de l'axe instantané avec le rayon vecteur, il faut faire dans ces équations,

$$\zeta = 0, \quad \xi = r \cos \nu, \quad \eta = r \sin \nu;$$

on obtient ainsi les conditions

$$(1) \quad -\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \cos i = 0,$$

$$(2) \quad \frac{di}{dt} \sin(\nu - \psi) - \frac{d\omega}{dt} \cos(\nu - \psi) \sin i = 0,$$

qui expriment la loi du déplacement du plan mobile. On peut remplacer l'une d'elles par

$$(3) \quad \frac{d\psi}{dt} \tan i - \frac{di}{dt} \tan(\nu - \psi) = 0,$$

qui se déduit immédiatement de (1) et (2).

Cette loi de déplacement est indépendante du temps, car on peut supprimer la différentielle dt dans les équations (1), (2), (3) et prendre comme variable indépendante ω , i ou ψ . Il en résulte que si l'on connaît r et ν (ou ξ et η) en fonction du temps, le mouvement relatif du point matériel est bien défini, mais son mouvement dans l'espace ne l'est pas, puisqu'on ignore la valeur de la

rotation instantanée du plan $\xi O\eta$. Il faut donc une troisième équation contenant le temps. Cette équation sera obtenue, par exemple, en projetant la formule fondamentale de la dynamique sur un axe fixe.

3. Relations entre les angles θ , φ et les angles ν , ω , ψ , i . — Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}x &= \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta = r(\alpha \cos \nu + \beta \sin \nu) = r \cos \varphi \cos \theta, \\y &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta = r(\alpha_1 \cos \nu + \beta_1 \sin \nu) = r \cos \varphi \sin \theta, \\z &= \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta = r(\alpha_2 \cos \nu + \beta_2 \sin \nu) = r \sin \varphi.\end{aligned}$$

En exprimant les α , β , γ , ... (cosinus des directions des axes) par les formules d'Olinde Rodrigues, et en comparant les deux derniers membres de chaque égalité, on est conduit aux relations

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \varphi \cos \theta = \cos \omega \cos(\nu - \psi) - \cos i \sin \omega \sin(\nu - \psi), \\ \cos \varphi \sin \theta = \sin \omega \cos(\nu - \psi) + \cos i \cos \omega \sin(\nu - \psi), \\ \sin \varphi = \sin i \sin(\nu - \psi), \end{cases}$$

dont les deux premières peuvent être remplacées par

$$(5) \quad \begin{cases} \cos \varphi \cos(\theta - \omega) = \cos(\nu - \psi), \\ \cos \varphi \sin(\theta - \omega) = \cos i \sin(\nu - \psi). \end{cases}$$

La dérivation de la troisième des équations (4) donne

$$\frac{d(\sin \varphi)}{dt} = \frac{d\nu}{dt} \sin i \cos(\nu - \psi) + \frac{di}{dt} \cos i \sin(\nu - \psi) - \frac{d\psi}{dt} \sin i \cos(\nu - \psi);$$

les deux derniers termes se détruisent en vertu de (3) et l'on a

$$(6) \quad \frac{d(\sin \varphi)}{d\nu} = \sin i \cos(\nu - \psi).$$

La relation

$$\sin^2 \varphi + \left[\frac{d(\sin \varphi)}{d\nu} \right]^2 = \sin^2 i$$

s'obtient sans difficulté, et comme i est toujours un angle aigu positif, du moins dans les applications que nous avons en vue, nous écrirons

$$(7) \quad \begin{cases} \sin i = \sqrt{\sin^2 \varphi + \left[\frac{d(\sin \varphi)}{d\nu} \right]^2}, \\ \cos i = \cos \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{d\varphi}{d\nu} \right)^2}. \end{cases}$$

La première des équations (5), combinée avec (6), donnera

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{d(\sin \varphi)}{dv} = \sin i \cos(\theta - \omega),$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad \frac{d\varphi}{dv} = \sin i \cos(\theta - \omega).$$

Une relation intéressante nous sera fournie par la considération du moment cinétique, lequel est porté par Oζ. La projection du moment cinétique sur l'axe fixe Oz est égale à

$$r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{dt},$$

et aussi à

$$r^2 \frac{dv}{dt} \cos i;$$

d'où

$$(9) \quad \frac{d\theta}{dt} \cos^2 \varphi = \frac{dv}{dt} \cos i \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\theta}{dv} = \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi}.$$

Enfin la combinaison des dernières relations des groupes (4) et (5), puis la combinaison de (8) et (9), donnent les deux formules

$$(10) \quad \tan \varphi = \tan i \sin(\theta - \omega),$$

$$(11) \quad \frac{d(\tan \varphi)}{d\theta} = \tan i \cos(\theta - \omega).$$

4. Équations des mouvements en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires. — *Le point matériel représentant le corps céleste aura pour masse 1.* La fonction de forces sera désignée par U si elle est exprimée en fonction de r, θ, φ , et par V dans les autres cas; elle pourra dépendre non seulement des coordonnées du point mobile, mais aussi du temps. U (ou V) contient une constante arbitraire, que nous supposerons choisie de manière que $U = 0$ à l'infini. Entre les dérivées partielles de $U(r, \theta, \varphi)$ et de $V(x, y, z)$ ont lieu les relations suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial U}{\partial r} = x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} - r \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y} + r \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial z}; \end{array} \right.$$

et

$$(13) \quad \begin{cases} r \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\sin \theta}{\cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \cos \theta \left(r \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial r} - \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right), \\ r \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \sin \theta \left(r \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial r} - \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right), \\ r \frac{\partial V}{\partial z} = r \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial r} + \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Cela étant, les équations du mouvement s'écrivent, en coordonnées cartésiennes

$$(14) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}$$

et, en coordonnées polaires, par la méthode de Lagrange :

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos^2 \varphi - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{\partial U}{\partial r}, \\ \frac{d \left(r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} \right)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 r^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{d \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Elles admettent l'intégrale première des forces vives

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 2(U + h).$$

ou

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2(U + h)$$

dans tous les cas où la fonction de forces est invariable avec le temps. Si U (ou V) contient le temps explicitement, l'intégrale des forces vives peut être remplacée, en général, d'une manière approchée, par une équation différentielle du premier ordre ayant la même forme, pourvu que la partie de U qui varie avec le temps reste assez faible ⁽¹⁾. Cette circonstance se présente dans la

(1) On peut le constater à propos du problème des trois corps, lorsque la masse de l'un d'eux est très importante en regard de celles des deux autres. Le

plupart des problèmes de la Mécanique Céleste. La fonction U étant exprimée en fonction des coordonnées et du temps, la constante h doit être remplacée par

$$h + \text{fonction du temps};$$

le module maximum de cette fonction du temps est, d'ailleurs, faible par rapport à h dans les applications les plus courantes.

En coordonnées polaires, l'intégrale des forces vives peut se remplacer par l'équation différentielle suivante, plus commode et due à Laplace,

$$(16) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} = 2(U + h) + r \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Elle est une combinaison de l'intégrale des forces vives avec la première des équations (15).

5. Convention relative à la constante des forces vives. — Nous n'envisagerons que des mouvements pour lesquels la constante h est négative, de façon que U ne puisse pas descendre au-dessous d'une certaine limite positive, et que, par suite, le point mobile ne puisse s'éloigner à l'infini, où U doit s'annuler. Si le mobile s'en allait à une trop grande distance des masses attirantes considérées, il serait influencé par l'attraction d'autres masses dont l'effet ne serait plus négligeable. Il est donc nécessaire de supposer

$$h < 0,$$

mouvement de chaque petit corps se traite comme un problème de perturbations planétaires. Si l'on n'a en vue que les inégalités du premier ordre, on remplace, dans la fonction perturbatrice, les coordonnées du corps troublant par leurs expressions képlériennes en fonction du temps. Mais, en plus des trois équations du mouvement, on obtient une équation différentielle du premier ordre en exprimant, par rapport au temps, les coordonnées et les vitesses du corps troublant, comme si son mouvement était elliptique, dans l'intégrale des forces vives du système des trois corps.

Si l'une des trois masses est nulle (cas purement théorique), et si, en outre, les deux autres masses ont des orbites circulaires, les équations du mouvement de la masse nulle admettent *l'intégrale première de Jacobi*

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2n' \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) + 2(U + k);$$

n' , vitesse angulaire des masses non nulles; k , constante arbitraire.

afin que le point matériel reste à distance finie et convenable. Signalons cependant que pour un mouvement à l'intérieur d'une masse attirante la constante des forces vives peut être positive; nous le verrons à propos des amas d'étoiles.

6. Convention relative au moment cinétique. — Adoptons la notation G pour le moment cinétique, et J pour le moment cinétique projeté sur Oz ,

$$r^2 \frac{dv}{dt} = G, \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = J, \quad J = G \cos i.$$

Dans tous les mouvements que nous étudierons, G et J seront différents de zéro et de signe constant : tous deux positifs ou tous deux négatifs. θ et v varieront donc constamment dans le même sens, comme t . *Admettons que G et J sont positifs*; θ et v sont alors des fonctions croissantes du temps dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

7. Équations des mouvements en coordonnées de Laplace. — Le changement de variables

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

remplace les deux premières équations (14) par

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y}, \\ 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \cos \theta \frac{\partial V}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de cette dernière par ρ ; le premier membre deviendra la dérivée de $\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$, et le second membre sera égal, d'après les formules (13), à $\frac{\partial U}{\partial \theta}$. Multiplions encore par $2\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ et intégrons : il viendra

$$\left[\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right]^2 = J^2 = G^2 + 2 \int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} dt = G^2 + 2 \int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta;$$

G , constante arbitraire, devient la constante des aires lorsque U est indépendant de θ ; alors $J = G$.

Au sujet de la fonction représentée par l'intégrale indéfinie $\int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$, nous devons entendre que, la quantité soumise au signe $\int$ étant supposée développée en série trigonométrique de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n \theta + \beta_n) \quad (\lambda_n \neq 0),$$

l'intégration est effectuée sans ajouter aucune constante au résultat.

Au lieu de l'équation précédente qui s'obtient par une intégration, nous pouvons nous borner à écrire

$$(17) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Examinons maintenant l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y};$$

le second membre est égal, d'après les formules (13), à

$$\cos \varphi \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Transformons le premier membre en prenant θ , au lieu de t , comme variable indépendante; cela donne

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = Ju^2 \frac{d\rho}{d\theta} = -J \frac{du}{d\theta}, \\ \frac{d^2 \rho}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(-J \frac{du}{d\theta} \right) = Ju^2 \frac{d}{d\theta} \left(-J \frac{du}{d\theta} \right) = -Ju^2 \left(J \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{dJ}{d\theta} \frac{du}{d\theta} \right), \\ \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= -Ju^2 \left(J \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{dJ}{d\theta} \frac{du}{d\theta} + Ju \right). \end{aligned}$$

On a donc l'équation

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{du}{d\theta} + u = \frac{1}{J^2 u^2} \left(\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial r} \right),$$

qui s'écrit, en introduisant $s = \frac{1}{r}$, dans le second membre,

$$(18) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{du}{d\theta} + u = \frac{\cos^2 \varphi}{J^2} \left(\cos \varphi \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\sin \varphi}{s} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right).$$

Nous obtiendrons une autre équation du même genre en faisant la substitution

$$z = \frac{w}{u} \quad \text{dans} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial \Lambda}{\partial z}.$$

Nous avons successivement

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= J u^2 \frac{dz}{d\theta} = J \left(u \frac{dw}{d\theta} - w \frac{du}{d\theta} \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= J u^2 \frac{d}{d\theta} \left[J \left(u \frac{dw}{d\theta} - w \frac{du}{d\theta} \right) \right] \\ &= \left[\frac{dJ}{d\theta} \left(u \frac{dw}{d\theta} - w \frac{du}{d\theta} \right) + J \left(u \frac{d^2 w}{d\theta^2} - w \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \right] J u^2, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -s^2 \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial s} + s \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

L'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial \Lambda}{\partial z}$$

devient

$$\begin{aligned} u \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{dw}{d\theta} \right) - w \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{du}{d\theta} \right) \\ = \frac{1}{J^2 u^2} \left(-s^2 \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial s} + s \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

ou, en vertu de (18),

$$\begin{aligned} u \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{dw}{d\theta} \right) - w \left[\frac{1}{J^2 u^2} \left(s^2 \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial s} + s \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) - u \right] \\ = \frac{1}{J^2 u^2} \left(-s^2 \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial s} + s \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Le remplacement de w par $\tan \varphi$ devant le crochet du premier membre nous conduit, après simplifications, à

$$u \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{dw}{d\theta} + \tan \varphi \right) = \frac{1}{J^2 u^2} \frac{s}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

que nous écrirons sous la forme finale

$$(19) \quad \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{dw}{d\theta} + w - \frac{r^2}{J^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$$

Les équations (17), (18), (19) suffisent à définir le mouvement, puisqu'elles résultent de la transformation du système (14); la

fonction J ne constitue pas une inconnue supplémentaire, mais une quantité auxiliaire commode.

Nous signalerons une forme particulièrement simple pour le deuxième membre de l'équation (18). Si nous exprimons le potentiel V en coordonnées semi-polaires, nous aurons une fonction $E(\rho, \theta, z)$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial r} &= \cos \varphi \frac{\partial E}{\partial \rho} + \sin \varphi \frac{\partial E}{\partial z}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -\sin \varphi \frac{\partial E}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{\partial E}{\partial z}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial E}{\partial \rho},$$

et l'on voit que le second membre de (18) est égal à

$$-\frac{1}{J^2 u^2} \frac{\partial E}{\partial \rho}$$

ou encore à

$$\frac{1}{J^2} \frac{\partial E}{\partial u}.$$

L'équation (18) prend la forme simple

$$(20) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{du}{d\theta} + u - \frac{1}{J^2} \frac{\partial E}{\partial u} = 0.$$

Avec les mêmes variables (u, θ, z), l'équation (19) s'écrit

$$(21) \quad \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{dw}{d\theta} + w - \frac{1}{J^2} \left(z \frac{\partial E}{\partial u} + \frac{1}{u^3} \frac{\partial E}{\partial z} \right).$$

On peut prendre comme équations du mouvement : (17), (20), (21).

8. Mouvement relatif dans le plan instantané de Hansen.

Soient M et M' les positions du point mobile aux instants t et $t + \Delta t$. Le point du plan instantané $\xi O \eta$ qui coïncide avec M à l'instant t a une vitesse nulle à cet instant. A l'instant $t + \Delta t$, sa vitesse est égale au produit de la rotation instantanée par la distance MP à l'axe instantané de rotation OM' , et son vecteur vitesse est perpendiculaire au plan MOM' . Quand Δt tend vers zéro, ce vecteur vitesse tend vers zéro, mais son support tend vers

la perpendiculaire en M au plan $\xi O\eta$, limite du plan MOM'. La vitesse du point coïncidant étant nulle, le vecteur accélération de ce point a le même support que le vecteur vitesse; il est parallèle à l'axe O ζ . La force d'inertie du point coïncidant a donc la même direction que O ζ .

Pour mettre en équations le mouvement relatif dans le plan $\xi O\eta$, il faut ajouter aux forces appliquées au point matériel : 1° la force d'inertie du point coïncidant du plan $\xi O\eta$; cette force, perpendiculaire au plan, n'a pas d'effet; 2° la force de Coriolis, qui est aussi perpendiculaire au plan $\xi O\eta$. Les deux forces fictives étant sans influence, les équations du mouvement relatif seront les mêmes que si le plan était fixe, c'est-à-dire

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad (V, \text{ fonction de } \xi, \eta, \zeta) \quad (1).$$

Mais pour définir complètement le mouvement dans l'espace, il faut projeter la formule fondamentale de la dynamique sur les trois axes d'un trièdre de coordonnées. Nous la projetterons sur O ξ , O η et O z (voir la fin du n° 2), ce qui nous donnera le système d'équations

$$(22) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

équivalent à chacun des systèmes (14) et (15), pourvu qu'on lui adjoigne la loi du déplacement du plan $\xi O\eta$.

Remplaçons maintenant les deux premières équations (22) par les suivantes :

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \xi \frac{\partial V}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial V}{\partial \eta}, \\ \xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \xi \frac{\partial V}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial V}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

(1) La dérivée $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ satisfait à

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = - \frac{\sin i \cos(\nu - \psi)}{r \cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\cos i}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

mais cette formule ne nous est d'aucune utilité.

qui s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(r \frac{dr}{dt} \right) - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = r \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v}$$

[la transformation des seconds membres résulte des formules (12) dans lesquelles on a mis ξ , η , ζ et v au lieu de x , y , z et θ , après quoi l'on a fait $\zeta = 0$]. Si l'on passe des coordonnées polaires aux coordonnées de Hansen, les deux variables angulaires θ et φ sont remplacées par la seule variable v , les équations du changement de coordonnées étant de la forme

$$r = r, \quad \theta = \text{fonction de } v, \quad \varphi = \text{fonction de } v.$$

Il en résulte que $\mathcal{U}$ est fonction de v par l'intermédiaire de θ et φ , et l'on a

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dv} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dv}.$$

La transformée de la première équation (22) s'écrit, après simplifications,

$$(23) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}.$$

La transformée de la deuxième est

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v}.$$

Transformons la troisième en posant $z = \mu r$, d'où

$$\mu = \sin \varphi;$$

il vient

$$r \frac{d^2 \mu}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$$

ou, en remplaçant $\frac{d^2 r}{dt^2}$ par sa valeur tirée de (23),

$$\frac{d^2 \mu}{dt^2} + \mu \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - \mu \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right).$$

Le second membre est égal à

$$\frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi},$$

d'après la troisième des formules (13); écrivons donc

$$(25) \quad \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \mu \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\mu}{dt} = \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Le système des équations du mouvement, en utilisant les coordonnées de Hansen, est constitué par (23), (24) et (25). Il faut ajouter la loi du déplacement du plan mobile, définie, par exemple, par (1) et (3), puis les deux formules (5), ou bien l'une de ces formules et la troisième des formules (4) ⁽¹⁾. On a ainsi sept équations distinctes en r , v , ω , i , ψ , θ , φ .

L'intégrale des forces vives, quand elle existe, s'écrit

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = 2(U + h).$$

9. **Équations définitives en coordonnées de Hansen.** Nous obtiendrons les formes d'équations les plus avantageuses en prenant v , au lieu de t , comme variable indépendante.

s étant l'inverse du rayon vecteur, posons, comme nous l'avons vu,

$$\frac{dv}{dt} = G s^2,$$

et éliminons dt dans (23) et dans (25). Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{s^2} \frac{ds}{dv} \frac{dv}{dt} = -G \frac{ds}{dv}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -G s^2 \frac{d}{dv} \left(G \frac{ds}{dv} \right) = -G^2 s^2 \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv} \right); \end{aligned}$$

(23) devient

$$-G^2 s^2 \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv} + s \right) = \frac{\partial U}{\partial r}$$

ou

$$(26) \quad \frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv} + s - \frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s} = 0.$$

⁽¹⁾ Les trois formules constituées par le groupe (5) et la troisième formule (4) se réduisent à deux.

Nous avons ensuite

$$\frac{d\mu}{dt} = G s^2 \frac{d\mu}{dv},$$

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} = G s^2 \frac{d}{dv} \left(G s^2 \frac{d\mu}{dv} \right) = G^2 s^4 \left(\frac{d^2\mu}{dv^2} + \frac{2}{s} \frac{ds}{dv} \frac{d\mu}{dv} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\mu}{dv} \right);$$

(25) devient

$$(27) \quad \frac{d^2\mu}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\mu}{dv} + \mu = \frac{r^2 \cos \varphi}{G^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Au lieu de (24) nous pouvons écrire

$$(28) \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial U}{\partial v}.$$

Le système d'équations formé par (26), (27), (28) est équivalent au système (23), (24), (25).

Avec v comme variable indépendante, le premier membre de (28) se met sous la forme

$$G \frac{dG}{dv} s^2.$$

On a d'autre part

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dv} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dv};$$

d'où

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dv} = \frac{1}{G^2 s^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dv} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dv} \right)$$

et

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\mu}{dv} = \frac{\cos \varphi}{G^2 s^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dv} \right)^2 + \frac{1}{G^2 s^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dv} \frac{d\mu}{dv}.$$

Faisons les substitutions

$$\left(\frac{d\varphi}{dv} \right)^2 = 1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}$$

et

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi},$$

qui sont indiquées par les formules (7) et (9); il vient

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\mu}{dv} = \frac{\cos \varphi}{G^2 s^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{1}{G^2 s^2} \frac{\cos^2 i}{\cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{G^2 s^2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\mu}{dv},$$

et cette expression de $\frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\mu}{dv}$ permet de remplacer l'équation (27) par la suivante :

$$(29) \quad \frac{d^2\mu}{dv^2} + \frac{1}{G^2 s^2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\mu}{dv} + \mu - \frac{1}{G^2 s^2} \frac{\cos^2 i}{\cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0,$$

dont nous aurons l'occasion de faire usage.

En prenant toujours v comme variable indépendante, l'intégrale des forces vives (quand U ne dépend pas de t) s'écrit sous la forme remarquable

$$(30) \quad \left(\frac{ds}{dv} \right)^2 + s^2 = \frac{2}{G^2} (U + h).$$

10. Variation des constantes arbitraires par la méthode de M. Heinrich. — Désignons par q_1, q_2, q_3 les coordonnées du point mobile dans n'importe quel système, excepté celui de Hansen, et supposons que la fonction de forces

$$V(q_1, q_2, q_3, t)$$

puisse être présentée comme la somme de deux termes

$$V_0(q_1, q_2, q_3) + \lambda V_1(q_1, q_2, q_3, t)$$

(λ , petit paramètre), de sorte que les équations du mouvement correspondant à la fonction V_0 admettent des solutions périodiques ou quasi-périodiques avec deux ou trois fréquences fondamentales. En utilisant ces solutions, supposées connues, comment aborderons-nous la recherche des solutions correspondantes du problème complet, qui tient compte de la fonction perturbatrice λV_1 ? M. Heinrich a indiqué une méthode très simple ⁽¹⁾, que nous adapterons facilement à notre cas.

Admettons que les équations du mouvement possèdent, pour $\lambda = 0$, une solution quasi-périodique d'ordre 3, les coordonnées q_1, q_2, q_3 étant exprimables au moyen de séries de Fourier généralisées, absolument et uniformément convergentes,

⁽¹⁾ Voir *Publications de l'Institut Astronomique de l'Université Charles, de Prague*, 2^e série, n^o 12 et suivants.

procédant suivant les multiples des arguments

$$Q_1 = n_1 t + k_1, \quad Q_2 = n_2 t + k_2, \quad Q_3 = n_3 t + k_3.$$

Prenons comme nouvelles variables de position Q_1, Q_2, Q_3 ; les variables conjuguées sont

$$P_1 = \frac{\partial T}{\partial Q_1}, \quad P_2 = \frac{\partial T}{\partial Q_2}, \quad P_3 = \frac{\partial T}{\partial Q_3},$$

T , demi-force vive du point matériel. La fonction hamiltonienne correspondante au potentiel V est

$$\sum Q'_k \frac{\partial T}{\partial Q'_k} - T - V_0 - \lambda V_1 \quad (k = 1, 2, 3),$$

et les équations canoniques du mouvement, qu'il est inutile d'écrire, expriment que la quantité

$$dL' = \sum \frac{\partial T}{\partial Q'_k} dQ_k - \left(\sum Q'_k \frac{\partial T}{\partial Q'_k} - T - V_0 - \lambda V_1 \right) dt$$

est une différentielle totale exacte. Il en est de même de la quantité

$$dL = \sum \frac{\partial T}{\partial Q_k} dQ_k - \left(\sum Q'_k \frac{\partial T}{\partial Q'_k} - T - V_0 \right) dt,$$

qui se déduit de la précédente en annulant λ .

Mais la différentielle dL peut être décomposée, en vertu de nos hypothèses, en une partie séculaire et une partie composée de termes périodiques, toutes deux étant des différentielles totales exactes. La deuxième partie est

$$d\{L\} = \sum \left\{ \frac{\partial T}{\partial Q'_k} \right\} dQ_k + \left(- \sum Q'_k \left\{ \frac{\partial T}{\partial Q'_k} \right\} + \{T + V_0\} \right) dt$$

(les accolades représentent l'ensemble des termes périodiques).

Si nous retranchons $d\{L\}$ de dL' , nous ne détruirons pas la forme canonique des équations qui découlent de dL' ; le mouvement perturbé peut donc être défini par les conditions pour que

$$dL' - d\{L\}$$

soit une différentielle totale exacte.

Or

$$dL' - d\{L\} = \sum \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_k} \right] dQ_k - \left(\sum Q'_k \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_k} \right] - [T + V_0] - \lambda V_1 \right),$$

les crochets étant employés pour désigner les parties séculaires.

Il en résulte qu'en associant aux variables angulaires Q_1, Q_2, Q_3 les « moments séculaires »

$$R_1 = \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_1} \right], \quad R_2 = \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_2} \right], \quad R_3 = \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_3} \right],$$

et en introduisant la fonction

$$H = \sum Q'_k \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_k} \right] - [T] - [V_0] - \lambda V_1,$$

les équations du mouvement perturbé, qui effectuent la variation des constantes arbitraires, s'écrivent

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial R_k}, \quad \frac{dR_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial Q_k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Il peut arriver que la solution quasi-périodique du système non perturbé, qui nous a servi de point de départ, dégénère en une solution périodique, ou en une solution quasi-périodique du second ordre ne comportant que deux fréquences fondamentales. Poincaré a montré ⁽¹⁾, dans le premier cas, qu'on peut faire disparaître deux des moyens mouvements n_1, n_2, n_3 en changeant les variables par une substitution linéaire de la forme suivante, à coefficients entiers dont le déterminant est égal à 1,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha_1 \bar{Q}_1 + \alpha_2 \bar{Q}_2 + \alpha_3 \bar{Q}_3, & P_1 &= \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2 + \gamma_1 P_3, \\ Q_2 &= \beta_1 \bar{Q}_1 + \beta_2 \bar{Q}_2 + \beta_3 \bar{Q}_3, & P_2 &= \alpha_2 P_1 + \beta_2 P_2 + \gamma_2 P_3, \\ Q_3 &= \gamma_1 \bar{Q}_1 + \gamma_2 \bar{Q}_2 + \gamma_3 \bar{Q}_3, & P_3 &= \alpha_3 P_1 + \beta_3 P_2 + \gamma_3 P_3. \end{aligned}$$

Les moyens mouvements nouveaux sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} n_1 &= \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3, \\ n_2 &= \beta_1 n_1 + \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3, \\ n_3 &= \gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2 + \gamma_3 n_3. \end{aligned}$$

(1) POINCARÉ, *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. 1, p. 121.

Quand la solution de départ est périodique, n_1, n_2, n_3 sont commensurables entre eux, et l'on choisit les α, β, γ de telle sorte que

$$\bar{n}_2 = \bar{n}_3 = 0,$$

Quand la solution de départ est quasi-périodique avec deux fréquences, il existe entre n_1, n_2, n_3 une relation linéaire à coefficients entiers

$$an_1 + bn_2 + cn_3 = 0,$$

et l'on peut choisir les α, β, γ de manière que

$$\bar{n}_3 = 0;$$

les équations de condition sont

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 0, \quad a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0.$$

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES POTENTIELS PERTURBATEURS AUX TROIS TYPES

$$\Omega(r, \sin^2 \varphi),$$

$$\Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta),$$

$$\Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta, \sin n' t, \cos n' t).$$

DÉFINITION ET VALEUR NÉGATIVE DE LA FONCTION I..

II. Propriétés classiques du potentiel. — Lorsque le point attiré est extérieur aux corps attirants, le potentiel newtonien U (ou V) = $f \int \frac{dm}{r}$ vérifie, comme on sait, l'équation de Laplace

$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

qui s'écrit, en coordonnées polaires,

$$(31) \quad \nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0,$$

ou bien, en introduisant $s = \frac{1}{r}$,

$$(32) \quad \nabla U = s^4 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{s^2}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - s^2 \tan \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$$

A l'intérieur des masses attirantes, l'équation de Laplace est remplacée par celle de Poisson

$$(33) \quad \nabla U + 4\pi f \delta = 0.$$

dans laquelle δ représente la densité au point qui coïncide avec le point potentiel.

En dehors des masses le potentiel ne peut avoir ni maximum ni minimum, d'où absence de position d'équilibre stable.

12. Composantes de l'attraction. — Soit M le point matériel attiré; OMX le support de son rayon vecteur, orienté positivement de O vers M; MZ l'axe, dans le plan MOz, tel que l'angle des directions Oz, MZ soit aigu; MY l'axe tel que le trièdre MXYZ soit trirectangle direct.

La force attractive exercée sur le point M se décompose en : une force radiale D portée par MX, une force B perpendiculaire au plan MOz et portée par MY, une force A perpendiculaire au rayon vecteur et portée par MZ. Les intensités respectives de ces trois forces sont, en utilisant les formules (13),

$$(34) \quad \begin{cases} D = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y} + \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r}, \\ B = -\sin \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ A = -\sin \varphi \cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} - \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y} + \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Il y a lieu de faire les remarques suivantes :

La composante B disparaît dans le cas important où le champ de forces est de révolution autour de l'axe Oz.

Si, d'autre part, le rayon vecteur passe par une infinité de maxima et de minima quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, la composante radiale $\frac{\partial U}{\partial r}$ ne peut être constamment négative. En effet, l'équa-

tion (23) s'écrit

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{G^2}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial r},$$

et la dérivée seconde de r étant négative au voisinage de chaque maximum de r , on voit que $\frac{\partial U}{\partial r}$ est négatif en même temps. Dans les problèmes les plus courants de l'Astronomie, le potentiel a pour partie principale $\frac{1}{r}$, ce qui fait que $\frac{\partial U}{\partial r}$ est constamment négatif.

Quant à la composante A , elle fera l'objet d'une étude spéciale.

13. **Classification des champs de forces.** — Conformément au principe introduit par Lagrange et Laplace dès la fondation de la Mécanique Céleste, nous considérerons séparément l'action perturbatrice de chacun des astres qu'il y a lieu de faire intervenir, bien que dans la réalité ils agissent en même temps. L'approximation qu'on obtient ainsi est valable pour un grand nombre de siècles et dépasse largement les besoins de la pratique.

Cela étant, nous aurons à envisager plusieurs cas :

1^o *Il n'y a pas d'astre perturbateur*, mais le corps principal ne possède pas une distribution de masse en couches sphériques concentriques et homogènes. Ce problème est, par exemple, celui d'un satellite soumis à l'attraction d'une planète qui a la figure d'un sphéroïde aplati; si l'on prend comme axe Oz l'axe de rotation de la planète et comme plan xOy son plan équatorial, la force perturbatrice, provoquée par l'aplatissement, dérivera d'un potentiel fonction de r et fonction paire de φ . Appelons M la masse du sphéroïde, α son rayon équatorial, λ son aplatissement et x le rapport de la force centrifuge équatoriale à la pesanteur correspondante; nous aurons

$$(35) \quad \frac{U}{fM} = \frac{1}{r} + \frac{\alpha^2}{3} \left(\lambda - \frac{1}{2} x \right) \left(\frac{1 - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} \right) + \dots$$

r étant assez grand relativement à α , on peut se borner, dans beaucoup d'applications, aux deux premiers termes. La quantité $\lambda - \frac{1}{2} x$ est positive, et, si le sphéroïde est homogène avec un faible aplatissement, x est sensiblement égal à $\frac{4}{5} \lambda$.

Au lieu d'être un ellipsoïde de révolution aplati, le corps central peut avoir la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, comme certaines étoiles variables à éclipses, ou être un corps irrégulier tel qu'un astéroïde, animé d'une rotation uniforme autour d'un axe principal de son ellipsoïde central d'inertie. Désignons par A, B, C les moments principaux d'inertie ($A < B < C$) relatifs au centre de gravité, les axes correspondants de l'ellipsoïde central d'inertie étant OX, OY, OZ . Le petit axe OZ est l'axe de rotation et coïncide avec Oz . Soit n' la vitesse angulaire, constante, et soit t_0 un des instants où OX coïncide avec Ox ; nous avons, par un calcul facile,

$$(36) \quad U = \frac{fM}{r} + f \frac{2C - A - B}{4r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \\ + f \frac{3(B - A)}{4r^3} \cos^2 \varphi \cos 2[\theta - n'(t - t_0)] + \dots$$

S'il s'agit d'une étoile ellipsoïdale homogène, de demi-axes $a > b > c$, on posera

$$A = M \frac{b^2 + c^2}{5}, \quad B = M \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad C = M \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

2° *L'astre perturbateur est tel que les inégalités du second ordre par rapport au coefficient de la force corrective sont négligeables.* C'est le cas des actions mutuelles des grosses planètes du système solaire; c'est aussi le cas de chaque satellite dont la distance à la planète n'est pas trop grande, et de chaque astéroïde troublé par Jupiter sans qu'il y ait commensurabilité approchée, avec un rapport simple, entre les moyens mouvements. Le principe de Gauss concernant la recherche des inégalités séculaires permet alors de remplacer l'attraction de la planète troublante par celle d'un anneau elliptique représentant l'orbite de cette planète et tel que la masse de chaque élément de l'anneau soit proportionnelle au temps employé à le décrire suivant la loi des aires. On prend, naturellement, le plan de l'anneau pour plan xOy .

Si nous considérons un corps céleste soumis à l'attraction d'une masse centrale fixe M et d'un anneau de Gauss de très grand diamètre $2a'$, ayant pour masse m' (masse de la planète), pour

excentricité e' , et son périastre situé sur la partie positive de Ox , nous avons le potentiel

$$(37) \quad U = \frac{fM}{r} + \frac{fm'r^2}{4a'^3(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}(1-3\sin^2\varphi) \\ + \frac{3fm'e'r^3}{8a'^3(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}(1-5\sin^2\varphi)\cos\varphi\cos\theta + \dots$$

Lorsque la planète troublée reste à une grande distance du corps principal et de la planète perturbatrice, il y a lieu de rapporter son mouvement au centre de gravité du système formé par ces deux astres, et à substituer à ces derniers deux anneaux de Gauss homothétiques, avec le centre de gravité comme centre d'homothétie et foyer commun. Le premier anneau, qui a son périastre sur la partie positive de Ox , produit le potentiel

$$U' = fm' \left[\frac{1}{r} - \frac{3a'e'}{2r^2} \cos\varphi \cos\theta \right] \\ + fm' \frac{a'^2}{4r^3} \left[1 - 3\sin^2\varphi + 3e'^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\varphi + \frac{5}{2}\cos^2\varphi \cos 2\theta \right) \right] + \dots$$

Le deuxième anneau a pour grand axe $2a''$ et pour masse m'' telle que

$$m''a'' = m'a'.$$

Son potentiel est

$$U'' = fm'' \left[\frac{1}{r} + \frac{3a''e'}{2r^2} \cos\varphi \cos\theta \right] + fm'' \frac{a''^2}{4r^3} [1 - 3\sin^2\varphi + \dots].$$

Dans la somme des potentiels des deux anneaux, les termes en $\frac{1}{r^2}$ se détruisent, et l'on obtient

$$(38) \quad U = \frac{f(m' + m'')}{r} + f \frac{m'a'^2 + m''a''^2}{4r^3} \\ \times \left[1 - 3\sin^2\varphi + 3e'^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\varphi + \frac{5}{2}\cos^2\varphi \cos 2\theta \right) \right] + \dots$$

3° *Les perturbations d'ordre plus élevé que le premier sont sensibles.* — Cela peut être dû à des valeurs considérables de la force perturbatrice, c'est le cas pour la Lune, pour le huitième satellite de Jupiter; cela résulte aussi de l'existence de commensurabilités approchées, avec des rapports simples, entre les

moyens mouvements des planètes troublante et troublée : Hécube et Jupiter, par exemple, et plusieurs couples de satellites de Saturne. Il n'est plus possible, dans les problèmes de ce genre, de se servir des anneaux de Gauss, qui équivalent au remplacement de la fonction perturbatrice par sa valeur moyenne relativement au temps. On doit prendre l'expression complète du potentiel, déduite de la formule

$$U = \frac{fM}{r} + fm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right)$$

(r' , rayon vecteur de la planète troublante; H , angle formé par les deux rayons vecteurs r et r' ; Δ , distance mutuelle des deux planètes). Mais si r' (ou r) est suffisamment grand, on pourra se borner à un nombre limité de termes dans le développement de U suivant les puissances de $\frac{r}{r'}$ (ou de $\frac{r'}{r}$). Ainsi, pour la théorie de la Lune, la force perturbatrice résultant de l'action du Soleil, on prendra comme potentiel

$$\frac{f(m_0 + m)}{r} + fM \frac{r^2}{r'^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right),$$

m_0 , masse de la Terre; m , masse de la Lune; M , masse du Soleil. L'orbite du Soleil autour de la Terre étant supposée circulaire, on a supprimé le terme constant $\frac{fM}{r'}$; de plus, $\frac{fM}{r'^3} = n'^2$ d'après la troisième loi de Képler (n' , vitesse angulaire du Soleil autour de la Terre). Si l'on développe $\cos^2 H$ en fonction de r , φ et t , avec le plan de l'écliptique comme plan xOy , on sera conduit à la formule

$$(39) \quad U = \frac{f(m_0 + m)}{r} + \frac{n'^2}{4} r^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \\ + \frac{3n'^2}{4} r^2 \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)] + \dots,$$

qui peut servir de point de départ à la théorie de la Lune (1).

1° L'astre considéré se meut à l'intérieur d'une masse

(1) Il faut remarquer, toutefois, qu'en négligeant l'excentricité de l'orbite terrestre, on n'obtient pas l'inégalité périodique de la Lune connue sous le nom d'équation annuelle.

attirante, c'est-à-dire dans une région de l'espace remplie d'un très grand nombre de corps semblables entre eux, ne se rencontrant pas et ne subissant aucun choc de la part de l'astre. L'attraction de cet ensemble de corps est sensiblement équivalente à celle d'une masse continue répartie dans la région envisagée, et, dans les cas les plus simples, cette masse fictive possède un plan de symétrie (qu'on prendra pour plan xOy) et un axe de révolution perpendiculaire (qu'on prendra pour Oz). Il en est ainsi lorsqu'on veut étudier le mouvement d'un corpuscule de l'anneau de Saturne ou le mouvement d'une étoile à l'intérieur d'un amas globulaire.

Le potentiel d'un amas globulaire homogène (de masse M) s'exprime par une formule connue relative aux ellipsoïdes de révolution aplatis. Les demi-axes équatorial et polaire ayant pour longueurs a et b , et le rapport $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ étant désigné par k , l'attraction sur un point intérieur dérive du potentiel

$$(40) \quad U = \frac{3}{2} \frac{fM}{bk} \arctan k - \frac{3}{4} \frac{fMr^2}{b^3} \frac{1}{k^3} \\ < \left[\arctan k - \frac{k}{1+k^2} + \left(\frac{3k+2k^3}{1+k^2} - 3 \arctan k \right) \sin^2 \varphi \right],$$

expression dans laquelle la quantité entre crochets est positive. En effet, cette quantité, qui est nulle pour $k = 0$, a pour dérivée par rapport à k ,

$$\frac{2k^2}{(1+k^2)^2} + \frac{2k^4}{(1+k^2)^2} \sin^2 \varphi > 0;$$

elle est donc croissante avec k et, par suite, positive pour $k > 0$.

Tous les exemples que nous venons de voir mettent en évidence les *trois formes usuelles de la fonction de forces* U :

FORME I. — U est fonction uniforme de r et de $\sin^2 \varphi$; le champ de forces est de révolution autour de Oz et symétrique par rapport au plan xOy .

FORME II. — U est fonction uniforme de r , $\sin^2 \varphi$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, admettant la période 2π par rapport à θ .

FORME III. — U est fonction uniforme de r , $\sin^2 \varphi$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin n't$, $\cos n't$, périodique en θ de période 2π et périodique en t de période $\frac{2\pi}{n'}$.

Quelle que soit sa forme, U admet comme plan de symétrie le plan xOy , que nous appellerons *plan de l'équateur*.

14. Choix des unités de longueur et de temps. — Nous avons pris, jusqu'à présent, la masse du point attiré égale à 1 (*voir* n° 4); avec une masse m , le potentiel serait multiplié par m , mais les équations des mouvements, en explicitant U , ne changeraient pas.

Pour simplifier nos formules, nous choisirons les unités de longueur et de temps (l'une d'elles étant arbitraire) de manière que le terme principal de la fonction U , divisé par m , ait pour coefficient 1. *Si, par exemple,*

$$U = \frac{fM}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \quad (m = 1 : \varepsilon \text{ petit}),$$

nous ferons un choix d'unités tel que, $fM = 1$.

15. Inégalité commune à tous les systèmes de masses possédant un équateur. — Le plan xOy étant un plan de symétrie pour les corps attirants, supposons, en outre (et cela est conforme à la théorie des figures d'équilibre des corps célestes), que toute parallèle à Oz rencontrant un corps attirant soit découpée par le corps suivant un segment unique sur lequel la densité aille en décroissant ou, plus exactement, n'aille pas en croissant, quand on va du milieu du segment jusqu'à une extrémité. Nous pouvons regarder le segment en question de longueur $2c$, comme constitué par la superposition d'un très grand nombre ou d'une infinité de segments de même milieu, de longueurs décroissantes et de densités linéaires constantes. Le premier de ces segments homogènes aura pour longueur $2c$; le deuxième $2(c - \varepsilon_1)$; le troisième $2(c - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$; les ε_k étant très petits ou infiniment petits. Si le point attiré ne fait pas partie du segment attirant, on établit très facilement l'inégalité

$$\frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V}{\partial(z^2)} < 0,$$

qui exprime que la composante de l'attraction parallèle à Oz a le signe contraire de celui de z .

Lorsque le point attiré fait partie du segment attirant, il convient de regarder ce dernier comme un bâton cylindrique de rayon ρ

infiniment petit. L'attraction exercée est celle d'un cylindre circulaire sur un point de son axe, et le potentiel du bâton de longueur $2c$ a pour expression

$$V = \frac{2f\delta}{\rho^2} \int_{-c}^z [h - z + \sqrt{(h - z)^2 + \rho^2}] dh \\ + \frac{2f\delta}{\rho^2} \int_z^c [z - h + \sqrt{(h - z)^2 + \rho^2}] ah;$$

δ , densité linéaire.

Après avoir mis le second membre sous forme finie, on arrive sans peine à la formule

$$\frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{4f\delta}{\rho^2} \left(1 - \frac{2c}{\sqrt{(c - z)^2 + \rho^2} + \sqrt{(c + z)^2 + \rho^2}} \right).$$

Or, on a l'inégalité

$$\sqrt{(c - z)^2 + \rho^2} + \sqrt{(c + z)^2 + \rho^2} > \sqrt{(c - z)^2} + \sqrt{(c + z)^2} = 2c.$$

La fraction

$$\frac{2c}{\sqrt{(c - z)^2 + \rho^2} + \sqrt{(c + z)^2 + \rho^2}}$$

est donc inférieure à 1, d'où il résulte que $\frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z}$ est négatif.

L'inégalité

$$(41) \quad \frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z} < 0$$

est ainsi établie, pour le potentiel d'un segment homogène, quelle que soit la position du point attiré. Comme ce résultat est indépendant de la longueur du segment, le segment à densité variable qui résulte de la superposition de segments homogènes donnera lieu à la même inégalité, et il en sera de même de l'ensemble des masses attirantes, qu'on peut décomposer en un très grand nombre ou en une infinité de bâtons cylindriques parallèles à Oz .

16. Conséquence de l'inégalité précédente. — En posant

$$N = - \frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z},$$

la troisième équation (14) s'écrit

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + Nz = 0,$$

N est positif d'après (41), et borné si la trajectoire ne rencontre jamais les masses attirantes. La forme de cette équation différentielle montre que z s'annule une infinité de fois, séparées par des intervalles finis, lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$ ⁽¹⁾.

17. Inégalité commune à toutes les valeurs moyennes (par rapport au temps) des potentiels considérés. — Remarquons d'abord que, dans tous les exemples déjà vus, la composante radiale de l'attraction $\frac{\partial U}{\partial r}$ est négative; mais ce fait n'est pas absolument général, $\frac{\partial U}{\partial r}$ est positif dans certaines régions des nébuleuses annulaires.

Pour obtenir une inégalité caractéristique des champs d'attraction habituels, considérons un corps présentant à la fois la symétrie par rapport au plan xOy , la symétrie de révolution autour de l'axe Oz , et la propriété d'être aplati ou annulaire.

Nous inspirant d'une idée connue ⁽²⁾, nous supposerons le corps stratifié en surfaces homogènes de révolution dont la densité décroît vers l'extérieur, la section méridienne de chaque surface étant telle que tout cercle concentrique est découpé par elle suivant deux arcs dont les milieux sont dans le plan de l'équateur. Le corps peut être regardé comme la somme d'un grand nombre ou d'une infinité de corps homogènes, chacun des corps partiels étant limité par une des surfaces de stratification et possédant une densité convenable. Le corps partiel, à son tour, étant annulaire ou aplati, résulte de la juxtaposition d'une infinité de zones sphériques de centre O , d'épaisseur infiniment mince, de circonférence médiane située dans le plan xOy , et d'angle au centre variable d'une zone à la suivante. Dans le cas d'un corps aplati, les zones ayant un rayon inférieur ou égal au rayon polaire deviennent des

⁽¹⁾ Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, chap. VI.

⁽²⁾ Voir P. FATOU, *Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe*, § 7 (*Acta Astronomica*, sér. 2, vol. II, oct. 1931).

sphères. Un corps annulaire comme l'anneau de Saturne, mais continu, peut être considéré comme formé par des zones sphériques de hauteur et d'épaisseur extrêmement faibles.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la zone de rayon R et de hauteur $2b$ ($-b \leq z \leq b$); soient r, θ, φ les coordonnées polaires du point attiré, qu'on peut supposer dans le demi-plan $\theta = 0$, à cause de la symétrie de révolution du champ de forces. La variation de potentiel quand on passe du point (r, θ, φ) au point infiniment voisin $(r, \theta, \varphi + \Delta\varphi)$ est égale à la variation du potentiel au point (r, θ, φ) quand on remplace la zone donnée par celle qui s'en déduit au moyen de la rotation d'axe Oy et d'angle $-\Delta\varphi$.

Désignons par F_1, F_2, F_3, F_4 les lunules formées par les débordements mutuels des deux zones, et limitées aux demi-circonférences respectives :

$$(C_1) \quad z = b, \quad x = \sqrt{R^2 - b^2 - y^2},$$

$$(C_2) \quad z = b, \quad x = -\sqrt{R^2 - b^2 - y^2},$$

$$(C_3) \quad z = -b, \quad x = -\sqrt{R^2 - b^2 - y^2},$$

$$(C_4) \quad z = -b, \quad x = \sqrt{R^2 - b^2 - y^2}.$$

La variation du potentiel est

$$\Delta U = U \text{ de } F_2 + U \text{ de } F_1 - U \text{ de } F_4 - U \text{ de } F_3 \quad (\text{quand } \Delta\varphi \text{ est positif}),$$

ou

$$\Delta U = U \text{ de } F_1 + U \text{ de } F_3 - U \text{ de } F_2 - U \text{ de } F_4 \quad (\text{quand } \Delta\varphi \text{ est négatif}).$$

Prenons comme coordonnées curvilignes sur la zone sphérique y et φ , φ étant cette fois, et seulement pour ce calcul, un angle de rotation autour de Oy . L'élément d'aire d'une lunule est $R \Delta\varphi dy$, si $\Delta\varphi$ est positif, et $-R \Delta\varphi dy$ si $\Delta\varphi$ est négatif. Avec δ comme densité superficielle, nous avons, dans les deux cas,

$$\Delta U = \delta \int_{-R}^{+R} \left(\frac{1}{\Delta_2} + \frac{1}{\Delta_4} - \frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{\Delta_3} \right) R \Delta\varphi dy,$$

en posant pour abrégé

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sqrt{(r \cos \varphi - \sqrt{R^2 - b^2 - y^2})^2 + y^2 + (r \sin \varphi - b)^2}, \\ \Delta_2 &= \sqrt{(r \cos \varphi + \sqrt{R^2 - b^2 - y^2})^2 + y^2 + (r \sin \varphi - b)^2}, \\ \Delta_3 &= \sqrt{(r \cos \varphi + \sqrt{R^2 - b^2 - y^2})^2 + y^2 + (r \sin \varphi + b)^2}, \\ \Delta_4 &= \sqrt{(r \cos \varphi - \sqrt{R^2 - b^2 - y^2})^2 + y^2 + (r \sin \varphi + b)^2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire aussi

$$\frac{\Delta U}{\Delta \varphi} = \frac{f \delta R}{\sqrt{R^2 + r^2}} \int_{-R}^{+R} \left(\frac{1}{\sqrt{1-Q}} + \frac{1}{\sqrt{1+Q}} - \frac{1}{\sqrt{1-P}} - \frac{1}{\sqrt{1+P}} \right) dy,$$

avec

$$\begin{aligned}P &= \frac{2r}{R^2 + r^2} \left(\sqrt{R^2 - b^2 - y^2} \cos \varphi + b \sin \varphi \right), \\ Q &= \frac{2r}{R^2 + r^2} \left(-\sqrt{R^2 - b^2 - y^2} \cos \varphi + b \sin \varphi \right).\end{aligned}$$

Le développement de l'élément différentiel suivant les puissances de P et Q nous donne

$$\begin{aligned}\frac{\Delta U}{\Delta \varphi} &= \frac{2f \delta R}{\sqrt{R^2 + r^2}} \int_{-R}^{+R} (Q^2 - P^2) \\ &\times \left[\frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} (P^2 + Q^2) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1.3.5 \dots 4n-1}{2.4.6 \dots 4n} (P^{2n-2} + P^{2n-4} Q^2 + \dots + Q^{2n-2}) + \dots \right] dy,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta U}{\Delta \varphi} = \frac{-32f \delta b R r^2}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} \sin \varphi \cos \varphi \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - b^2 - y^2} K(y) dy,$$

en désignant par $K(y)$ la quantité entre crochets, toujours positive.

Lorsque le point attiré est sur une lunule, une des quantités P et Q est égale à ± 1 , et la formule précédente n'est plus valable, car l'élément différentiel de l'intégrale devient infini. On pourrait faire une analyse approfondie analogue à celle qui a été faite dans le n° 15 au sujet de l'attraction d'un bâton cylindrique; mais tout point d'une lunule est situé sur le contour d'un des corps partiels attirants, et nous savons que le potentiel d'un volume reste fini et varie d'une manière continue quand le point attiré traverse son

contour. Les conclusions quand P (ou Q) devient égal à ± 1 seront donc les mêmes que si P (ou Q) devenait seulement très voisin de ± 1 , et, dans ce voisinage, on peut encore utiliser le développement en série de $K(y)$.

Nous déduisons de la formule établie

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\Delta U}{\Delta \varphi} = \frac{-32 f \delta b R r^2}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} \cos \varphi \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - b^2 - y^2} K(y) dy,$$

où le second membre est négatif, puisque l'angle φ du point attiré est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Cette relation exprime qu'on a l'inégalité

$$(42) \quad \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} < 0.$$

sur la zone sphérique envisagée, d'épaisseur infiniment mince. La même inégalité a lieu, par suite, pour un corps de révolution homogène, *aplati* ou *annulaire*, formé par une infinité de telles zones. Elle a lieu, aussi, pour un corps hétérogène considéré comme la somme d'un très grand nombre ou d'une infinité de corps homogènes, aplatis ou annulaires, de révolution autour de Oz et symétriques par rapport au plan xOy.

En retranchant de la couche sphérique de rayon R la zone $-b \leq z \leq b$, on obtient deux calottes sphériques pour l'ensemble desquelles le potentiel satisfait à l'inégalité contraire de (42). Il s'ensuit que, pour un corps de révolution *allongé*, qu'on peut décomposer d'une manière analogue à celle des corps annulaires ou aplatis, on a

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} > 0.$$

Dans la catégorie des corps de révolution ayant un équateur et dont la densité décroît du centre jusqu'à la surface, l'inégalité (42) est donc caractéristique des corps annulaires ou aplatis.

Si la masse principale du champ de gravitation est un ellipsoïde de Jacobi, homogène, tournant autour de son petit axe, ou un corps irrégulier de forme invariable, tournant uniformément autour de son petit axe principal d'inertie relatif au centre de gravité, la valeur moyenne de la fonction U est égale au potentiel U_0 d'un

certain corps solide, symétrique par rapport au plan xOy , de révolution autour de Oz et aplati le long de cet axe. L'inégalité (42) s'applique donc à la fonction U_0 .

Il reste à l'étendre au cas où la fonction perturbatrice provient du mouvement képlérien d'un corps céleste autour d'un autre, ou de deux corps célestes autour du centre de gravité de leur masse totale.

18. Cas où les masses attirantes comprennent des anneaux de Gauss. — Nous nous plaçons dans les cas du problème des trois corps qui peuvent être traités par la méthode des perturbations : mouvement d'une planète du système solaire, mouvement d'une étoile de faible masse soumise à l'attraction de deux autres étoiles, de masses finies, dont elle reste éloignée, etc. La valeur moyenne de la force attractive (relativement au temps) est assimilable à l'attraction d'un anneau de Gauss, ou d'un système de deux anneaux de Gauss.

Considérons d'abord l'anneau elliptique défini par

$$z' = 0, \quad r' = \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e' \cos \theta'}.$$

Les coordonnées sont accentuées, comme il est d'usage pour les masses troublantes. La masse de chaque élément de l'anneau est proportionnelle au temps employé à le décrire suivant la loi des aires. Les coordonnées du point attiré étant r, θ, φ , on a l'expression suivante du potentiel, où m' désigne la masse totale de l'anneau, et n' le moyen mouvement de la planète qu'il remplace

$$U(r, \theta, \varphi) = f \frac{m' n'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi \cos(\theta' - \theta)}},$$

avec

$$r'^2 \frac{d\theta'}{dt} = n' a'^2 \sqrt{1 - e'^2}.$$

Prenons θ' comme variable d'intégration

$U(r, \theta, \varphi)$

$$= \frac{f m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{(1 - e'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e' \cos \theta')^2} d\theta'}{\sqrt{r^2 + \frac{a'^2(1 - e'^2)^2}{(1 + e' \cos \theta')^2} - 2r \cos \varphi \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e' \cos \theta'} \cos(\theta' - \theta)}},$$

et

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{fm' a' r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\frac{(1-e'^2)^{\frac{5}{2}}}{(1+e' \cos \theta')^3} \cos(\theta' - \theta) d\theta'}{\left[r^2 + \frac{a'^2(1-e'^2)^2}{(1+e' \cos \theta')^2} - 2r \cos \varphi \frac{a'(1-e'^2)}{1+e' \cos \theta'} \cos(\theta' - \theta) \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intervalle d'intégration correspondant à une circonférence sur laquelle le point de départ est arbitraire, nous avons

$$\int_0^{2\pi} = \int_{\theta - \frac{\pi}{2}}^{\theta + \frac{\pi}{2}} + \int_{\theta + \frac{\pi}{2}}^{\theta + \frac{3\pi}{2}},$$

et l'intégrale $\int_{\theta - \frac{\pi}{2}}^{\theta + \frac{3\pi}{2}}$ se ramène à une intégrale prise entre les

limites $\theta - \frac{\pi}{2}$ et $\theta + \frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi

$$(43) \quad \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = fm' a' r (1-e'^2)^{\frac{5}{2}} \int_{\theta - \frac{\pi}{2}}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{N'^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta' - \theta) d\theta',$$

formule dans laquelle

$$N = r^2(1+e' \cos \theta')^2 + a'^2(1-e'^2)^2 \\ - 2ra'(1-e'^2)(1+e' \cos \theta') \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi,$$

et N' se déduit de N en remplaçant θ' par $\theta' - \pi$

$$N' = r^2(1-e' \cos \theta')^2 + a'^2(1-e'^2)^2 \\ + 2ra'(1-e'^2)(1-e' \cos \theta') \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi.$$

Formons la différence $N' - N$

$$(44) \quad N' - N = -4r^2 e' \cos \theta' + 4ra'(1-e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi;$$

$\cos \varphi$ est toujours positif, et, dans l'intervalle d'intégration choisi, $\cos(\theta' - \theta)$ est également positif. Le second terme de l'expression de $N' - N$ est donc positif; or, il est prépondérant : 1° quand l'excentricité est faible; 2° quand r reste petit par rapport à a' .

Ces deux cas se présentent dans les applications astronomiques :

le premier est celui des petites planètes troublées par Jupiter; le deuxième trouve son application dans la théorie de la Lune, si l'on remplace l'action du Soleil par celle d'un anneau de Gauss, mais cette approximation insuffisante doit être complétée. L'inégalité $N' - N > 0$, qui a lieu, *en moyenne*, entraîne, en moyenne

$$\frac{1}{N'^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} < 0,$$

et l'intégrale qui représente $\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$ est négative.

Lorsque r est assez grand relativement à α' , sans que l'excentricité de l'anneau soit faible, les inégalités de moyennes

$$N' - N > 0, \quad \frac{1}{N'^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} < 0$$

peuvent ne pas être satisfaites ⁽¹⁾. Il convient alors de rapporter le mouvement de l'astre troublé au centre de gravité du système formé par les deux autres [voir l'exemple qui nous a conduit à la formule (38)], et de substituer à ceux-ci deux anneaux de Gauss, inversement homothétiques par rapport à l'origine. Soient leurs équations

$$r' = \frac{\alpha'(1 - e'^2)}{1 + e' \cos \theta'}, \quad r'' = \frac{\alpha''(1 - e''^2)}{1 - e' \cos \theta'}$$

dans le plan $z = 0$. Les masses m' et m'' satisfont à la relation

$$m'' \alpha'' = m' \alpha'.$$

Le premier anneau donne la relation (43) dans laquelle nous ferons

$$f m' \alpha' (1 - e'^2)^{\frac{3}{2}} = k.$$

Le deuxième donne

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = k r \int_{\theta - \frac{\pi}{2}}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{N_1^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{N_1^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta' - \theta) d\theta',$$

avec

$$N_1 = r^2 (1 - e' \cos \theta')^2 + \alpha''^2 (1 - e'^2)^2 \\ - 2 r \alpha'' (1 - e'^2) (1 - e' \cos \theta') \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi,$$

⁽¹⁾ On en a un exemple quand la longitude du point potentié est nulle ($\theta = 0$).

et

$$\begin{aligned} N'_1 &= r^2(1 + e' \cos \theta')^2 + a''^2(1 - e'^2)^2 \\ &\quad + 2ra''(1 - e'^2)(1 + e' \cos \theta') \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi. \end{aligned}$$

La différence $N'_1 - N_1$ est

$$N'_1 - N_1 = 4r^2 e' \cos \theta' + 4ra''(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi,$$

de sorte que si $N' - N$ devient négatif par la prépondérance du terme $-4r^2 e' \cos \theta'$, $N'_1 - N_1$ reste positif pour les mêmes valeurs de θ' , et réciproquement, si $N'_1 - N_1$ est négatif à cause du terme $4r^2 e' \cos \theta'$, la valeur correspondante de $N' - N$ est positive. D'ailleurs, r étant suffisamment grand en comparaison de a' et a'' , nous pouvons prendre les valeurs approchées suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= r(1 + e' \cos \theta') - a'(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi, \\ \sqrt{N'} &= r(1 - e' \cos \theta') + a'(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi, \\ \sqrt{N_1} &= r(1 - e' \cos \theta') - a''(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi, \\ \sqrt{N'_1} &= r(1 + e' \cos \theta') + a''(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi, \end{aligned}$$

d'où, en continuant l'approximation,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3(1 + e' \cos \theta')^3} + \frac{3a'(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi}{r^4(1 + e' \cos \theta')^4}, \\ \frac{1}{N'^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3(1 - e' \cos \theta')^3} - \frac{3a'(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi}{r^4(1 - e' \cos \theta')^4}, \\ \frac{1}{N_1^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3(1 - e' \cos \theta')^3} + \frac{3a''(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi}{r^4(1 - e' \cos \theta')^4}, \\ \frac{1}{N'_1{}^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{r^3(1 + e' \cos \theta')^3} - \frac{3a''(1 - e'^2) \cos(\theta' - \theta) \cos \varphi}{r^4(1 + e' \cos \theta')^4}. \end{aligned}$$

La quantité $\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$, qui fait l'objet de notre calcul, est égale, pour l'ensemble des deux anneaux de Gauss, à l'intégrale

$$kr \int_{\theta - \frac{\pi}{2}}^{\theta + \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{N_1^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{N'_1{}^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta' - \theta) d\theta',$$

et l'on voit, en substituant les expressions ci-dessus, que l'élément différentiel de l'intégrale est la somme de quatre fractions

négatives. On a donc, comme dans les cas précédents,

$$(42) \quad \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} < 0.$$

19. Sens de la composante de l'attraction moyenne, suivant la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan méridien. — L'inégalité (42), qui est réalisée dans tous les champs de gravitation usuels, et dans laquelle U est supposé ne pas contenir le temps, exprime que la composante A (ainsi nommée dans le n° 12) de l'attraction *est toujours dirigée vers l'équateur*.

Remarquons que le premier membre de (42) est fini pour $\varphi = 0$; on peut d'ailleurs, en le transformant, écrire l'inégalité sous la forme

$$2 \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial (\sin^2 \varphi)} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial U}{\partial (\sin^2 \varphi)} < 0.$$

On voit ainsi que U est une fonction décroissante de $\sin^2 \varphi$.

20. Introduction des quantités négatives L et W . — En posant

$$(45) \quad W = \frac{r^2 \cos^3 \varphi}{J^2 \sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

et

$$(46) \quad L = \frac{r^2}{G^2} \frac{\cos^2 i}{\sin \varphi \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

les équations différentielles (19) et (29) s'écrivent respectivement

$$(47) \quad \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} + (1 - W) \omega = - \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{d\omega}{d\theta},$$

$$(48) \quad \frac{d^2 \mu}{d\nu^2} + (1 - L) \mu = - \frac{r^2}{G^2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\mu}{d\nu}.$$

Étant donné que

$$J = G \cos i,$$

les fonctions W et L sont liées par la relation

$$(49) \quad \frac{L}{W} = \frac{\cos^3 i}{\cos^3 \varphi}.$$

Lorsque le potentiel U est indépendant du temps, L et W sont deux quantités négatives à cause de l'inégalité (42). Si U contient le

temps, ce sont les valeurs moyennes de L et W qui sont négatives. Dans tous les cas, U étant une fonction paire de φ , L et W ont des valeurs finies pour $\varphi = 0$. L'ordre de grandeur de L et W est celui du coefficient de la force perturbatrice (¹).

CHAPITRE III.

CHAMPS DE FORCES AYANT UN AXE DE RÉVOLUTION ET UN ÉQUATEUR. DÉFINITION DES FONCTIONS S ET Ψ .

21. Intégrale des aires. Simplification des équations différentielles. — Supposons maintenant que le potentiel soit fonction seulement de r et de $\sin^2 \varphi$. L'équation différentielle (17), qui représente, sous une forme abrégée, la deuxième équation du groupe (15), donne une *intégrale des aires*

$$(50) \quad J = \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} = C$$

(C , *constante des aires*), qui s'ajoute à celle des forces vives, et l'on a

$$(51) \quad G = \frac{C}{\cos i}.$$

Posons

$$(52) \quad \begin{cases} U(r, \sin^2 \varphi) = E(\rho, z^2), \\ F(\rho, z^2) = E(\rho, z^2) - \frac{C^2}{2\rho^2}. \end{cases}$$

La transformation faite au n° 7, compte tenu des relations

$$\cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial \rho}, \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

permet d'écrire

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{\partial E}{\partial \rho} + \frac{C^2}{\rho^3} = \frac{\partial F}{\partial \rho};$$

(¹) Lorsque U est indépendant de θ et de t , on établit facilement les relations

$$W = \frac{d(\tan^2 i)}{d(\tan^2 \varphi)} \quad \text{et} \quad L = \frac{d(\sin^2 i)}{d(\sin^2 \varphi)}.$$

et, comme $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial z}$, les équations du mouvement dans le plan méridien sont

$$(53) \quad \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Tout se passe comme si le point (ρ, z) se mouvait dans le champ de forces dérivé de la fonction F ; le problème est ramené à deux degrés de liberté.

Avec les coordonnées u, ω , de Laplace, les équations du mouvement, prises sous les formes (20) et (47), deviennent

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + u - \frac{1}{G^2} \frac{\partial E(u, z)}{\partial u} = 0, \\ \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (1 - W)\omega = 0. \end{cases}$$

En coordonnées de Hansen, l'équation (26) conserve son aspect, mais le second membre de l'équation (48) devient nul, de sorte que l'on a

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv} + s - \frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s} = 0, \\ \frac{d^2 \mu}{dv^2} + (1 - L)\mu = 0, \end{cases}$$

G étant défini par l'égalité (51).

La simplification des équations des mouvements donne un intérêt particulier à la considération des champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur. Une telle distribution des masses n'est jamais réalisée exactement dans les systèmes célestes, mais elle est réalisée souvent d'une manière approximative, par exemple quand l'astre central, de forme sphéroïdale aplatie, a une action prépondérante, ou quand l'anneau de Gauss remplaçant une planète perturbatrice possède une excentricité très faible qui le rend assimilable à un anneau circulaire, etc.

22. Solution périodique fondamentale. — Si la position et la vitesse initiales du mobile sont situées dans le plan $z = 0$, le mouvement aura lieu constamment dans ce plan. Les équations différentielles en coordonnées de Laplace ou de Hansen se réduisent à

une seule

$$(56) \quad \frac{d^2 s}{d\theta^2} + s - \frac{1}{C^2} \frac{dU(s)}{ds} = 0,$$

et le temps se détermine à l'aide de l'intégrale des aires

$$\frac{d\theta}{dt} = Cs^2.$$

On déduit de (56)

$$\theta - \theta_0 = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{-s^2 + \frac{2}{C^2}(U + h)}},$$

h désignant la constante des forces vives.

Le seul cas intéressant en Mécanique céleste est celui où la fonction sous le radical devient nulle en changeant de signe pour deux valeurs réelles et positives de s , encadrant la valeur initiale s_0 ⁽¹⁾; soient α et β ces deux valeurs, supposées être des zéros simples; s est une fonction périodique de θ , de période

$$(57) \quad \Theta = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ds}{\sqrt{-s^2 + \frac{2}{C^2}(U + h)}}.$$

Si $\frac{d^2 U}{ds^2}$ est positif dans l'intervalle ($\alpha \leq s \leq \beta$), l'angle compris entre deux apsides consécutives est supérieur à π ; si $\frac{d^2 U}{ds^2}$ est négatif, dans le même intervalle, cet angle est inférieur à π ⁽²⁾; si $\frac{d^2 U}{ds^2} = 0$ (mouvement képlérien), il est égal à π . Les inégalités

$$\frac{d^2 U}{ds^2} > 0, \quad \frac{d^2 U}{ds^2} < 0,$$

si elles ont lieu dans tout l'intervalle ($\alpha \leq s \leq \beta$), constituent des conditions suffisantes pour l'avance ou le recul des apsides; nous

⁽¹⁾ C'est le cas qui correspond à la perturbation d'un mouvement képlérien elliptique.

⁽²⁾ Nous nous contentons d'énoncer ces propositions. On les démontre en adaptant à l'équation (56) les propriétés connues des équations différentielles du type

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = f(y).$$

ne nous occupons pas de savoir, pour le moment, si elles sont nécessaires.

Les déplacements du périastre et de l'apoastre, au cours d'une révolution anomalistique, sont de l'ordre de grandeur de la force perturbatrice.

Lorsque les valeurs extrêmes du rayon vecteur tendent vers une limite commune $\frac{1}{p}$, la période de la fonction $s(\zeta)$ tend vers la limite

$$\sqrt{\frac{2\pi}{1 - \frac{1}{C^2} \frac{d^2 U(p)}{dp^2}}}.$$

Les conditions

$$\frac{d^2 U}{dp^2} > 0, \quad \frac{d^2 U}{dp^2} < 0$$

sont alors *nécessaires et suffisantes* pour que les apsides d'une orbite quasi-circulaire tournent dans le sens direct ou dans le sens rétrograde ⁽¹⁾.

La périodicité de s , fonction de ϑ , entraîne la périodicité de $\frac{d\theta}{dt}$, qui est égal à Cs^2 . La variation du temps correspondant à une période de ces deux fonctions est constante, égale à $\frac{2}{C} \int_x^\beta \frac{d\theta}{s^2}$. Soit T cette valeur; s et $\rho = \frac{1}{s}$ sont fonctions périodiques du temps, de période T . Deux cas peuvent se produire :

1° La variation Θ de θ pendant la période T est incommensurable avec 2π . Alors le mouvement $\rho = \rho(t)$, $z = 0$, dans le plan méridien, est périodique, mais le mouvement $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$, $z = 0$, dans l'espace, ne l'est pas.

2° La variation Θ de θ pendant la période T est commensurable avec 2π . On peut poser

$$\Theta = \frac{2k\pi}{\gamma},$$

k et γ étant deux nombres entiers premiers entre eux. Les deux mouvements, dans le plan méridien et dans l'espace, sont périodiques.

⁽¹⁾ Voir J. CHAZY, *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. I, p. 191 (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

diques : le premier a pour période T, le deuxième a pour période γT .

On peut choisir la constante des aires de manière que Θ et 2π soient commensurables : la formule (57) montre en effet que Θ est une fonction continue du paramètre C, d'où il résulte que si C est donné, une variation ΔC arbitrairement petite permettra d'obtenir pour Θ une fraction de la forme $\frac{2k\pi}{\gamma}$.

La solution $\rho = \rho(t)$, $z = 0$, du problème à deux degrés de liberté dans le plan méridien, jouera un rôle important dans la suite de notre étude; nous l'appellerons la *solution périodique du plan de l'équateur*.

23. Changement d'inconnue dans l'équation différentielle en s . — Reprenons l'équation (56), qui donne s comme une fonction périodique de θ . La courbe correspondant α du plan xOy a la même allure que la courbe

$$\frac{1}{s} = \rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos[(1 - c)\theta]}$$

(a , e , c , constantes), d'apsides variables, prise par Clairaut comme première approximation du mouvement de la Lune. Entre un maximum et un minimum consécutifs de s se trouve un zéro et un seul de $\frac{d^2 s}{d\theta^2}$; en effet, le mouvement $\rho = \rho(t)$, $z = 0$ consiste en une infinité d'oscillations de part et d'autre d'un point d'équilibre stable défini, dans le plan méridien, par les équations

$$(58) \quad s_0 = \frac{1}{C^2} \frac{dU(s_0)}{ds_0}, \quad z = 0.$$

C'est la racine s_0 , correspondant à ce point d'équilibre, qui annule la dérivée seconde $\frac{d^2 s}{d\theta^2}$.

Si nous posons maintenant

$$(59) \quad s = s_0 + \sigma,$$

l'équation (56) se transformera en la suivante

$$(60) \quad \frac{d^2 \sigma}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\frac{1}{C^2} \frac{dU}{ds} - s_0}{\sigma} \right) \sigma = 0.$$

Nous supposons essentiellement que la quantité

$$\frac{dU(s)}{ds} - \frac{dU(s_0)}{ds_0}$$

ne s'annule pas pour d'autres valeurs que $s = s_0$ dans l'intervalle de variation de s . Il en est certainement ainsi lorsque, dans cet intervalle, la dérivée seconde $\frac{d^2 U}{ds^2}$ est de signe constant. Or, avec les expressions usuelles de U , citées dans le Chapitre précédent, on a toujours, en faisant $\varphi = 0$,

$$\frac{d^2 U}{ds^2} > 0,$$

sauf si l'on prend le potentiel de la formule (40), qui donne

$$\frac{d^2 U}{ds^2} < 0.$$

La fonction

$$\Psi(s) = \frac{\frac{1}{C^2} \frac{dU}{ds} - s_0}{\sigma}$$

est finie pour $\sigma = 0$, sa valeur étant alors $\frac{1}{C^2} \frac{d^2 U(s_0)}{ds_0^2}$; elle est encore finie dans tout l'intervalle de variation de σ , et, par conséquent, *bornée, avec un signe constant*.

24. Définition des fonctions S et Ψ . — Nous venons de définir la fonction Ψ , dans le cas particulier des trajectoires du plan xOy , qui donnent lieu à une étude facile parce que U dépend seulement du rayon vecteur. Nous allons étendre cette définition aux orbites d'inclinaisons quelconques dans le champ dérivé de la fonction de forces $U(r, \sin^2 \varphi)$.

Admettons d'abord l'existence d'une infinité d'apsides, ce qui est conforme à la théorie classique de la perturbation d'un mouvement elliptique; nous reviendrons sur ce point dans le prochain Chapitre.

Par analogie avec la formule (59), posons

$$(61) \quad s = S + \sigma,$$

mais S , au lieu d'être une constante, sera variable avec le temps.

La décomposition de s sous la forme (61) ne peut être intéressante que si la fonction S se prête à une définition simple, et si son oscillation est aussi réduite que possible dans un intervalle de temps comparable à ceux qu'on envisage dans la pratique; moyennant cette deuxième condition, S représentera, à de petites quantités près, la valeur moyenne de s .

Considérons la première équation (55), dans laquelle

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv} = - \frac{r^2}{G^2} \frac{d^2 r}{dt^2};$$

$\frac{d^2 r}{dt^2}$ est positif au voisinage des périastres, négatif au voisinage des apoastres, donc s'annule au moins une fois entre un périastre et un apoastre consécutifs. A chaque instant où $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$, la fonction s satisfait à la relation

$$s = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Cela nous amène à considérer une fonction $S(v)$ définie implicitement par l'équation

$$(62) \quad S = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \sin^2 \varphi)}{\partial S}.$$

On se rend compte facilement que (62) admet au moins une racine positive; en effet, la fonction

$$S - \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \sin^2 \varphi)}{\partial S} \quad (S \text{ quelconque})$$

est négative pour $S = 0$, à cause de l'expression approchée du potentiel $U = Ms$, lorsque s est très petit; elle est, d'autre part, équivalente à S quand S tend vers $+\infty$, puisque l'origine est un point d'équilibre pour lequel

$$r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (1).$$

(1) L'étude de l'équation $s = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s}$ donne des indications sur les mouvements des corpuscules faisant partie d'une nébuleuse annulaire. Assimilons, en effet, la région de densité maxima de la nébuleuse, à une circonférence homogène, et considérons la trajectoire d'un corpuscule sur lequel l'attraction de cette circonférence est prépondérante. A un instant au moins entre deux apsides consé-

S'il n'y a qu'une racine positive, elle convient à notre objet et représente S. S'il y a plusieurs racines positives, une seule est acceptable : celle qui devient, pour $\varphi = 0$, la racine s_0 de l'équation (58), c'est-à-dire celle qui devient égale à la valeur moyenne de s lorsque, faisant tendre par la pensée φ vers zéro, on amène la trajectoire en coïncidence avec une trajectoire périodique du plan xOy ⁽¹⁾.

Opérons maintenant la transformation (61) sur la première équation (55). En posant

$$(63) \quad \Phi = -\frac{d^2 S}{dv^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{dS}{dv}$$

et

$$(64) \quad \Psi = \frac{\frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s} - S}{\sigma},$$

cutives, on aura $s = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s}$, avec des valeurs positives pour s et $\frac{\partial U}{\partial s}$. Mais si le corpuscule est dans une région voisine du bord intérieur de la nébuleuse, $\frac{\partial U}{\partial s}$ est négatif, comme le montre la formule

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -s^2 \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{fM}{a^2} \left[\frac{r}{a} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{3.5.7 \dots p+1}{2.4.6 \dots 2p} \left(\frac{r}{a} \right)^{p-1} \right],$$

développement de l'attraction d'une circonférence homogène de masse M , de rayon a , sur un point d'un de ses rayons, à la distance $r < a$ du centre. Le corpuscule quittera donc cette région pour passer dans une région où $\frac{\partial U}{\partial s}$ est positif, puis il reviendra dans la première région pour la quitter de nouveau.

Si l'on considère un corpuscule voisin, à un instant donné, du bord extérieur, $\frac{\partial U}{\partial s}$ est positif, car, pour $r > a$, avec $\varphi = 0$, l'attraction de la circonférence médiane est

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -s^2 \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{3.5.7 \dots 2p+1}{2.4.6 \dots 2p} \left(\frac{a}{r} \right)^{2p} \right].$$

Il y aurait lieu d'étudier si ce corpuscule peut passer, au cours de son mouvement, dans des régions où $\frac{\partial U}{\partial s}$ est négatif; ce n'est pas évident, *a priori*.

(1) Une telle déformation de trajectoire doit s'effectuer en conservant aux constantes des forces vives et des aires leurs valeurs.

le résultat est le suivant

$$(65) \quad \frac{d^2 \sigma}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\sigma}{dv} + (1 - \Psi) \sigma = \Phi,$$

qu'on peut écrire aussi

$$(66) \quad \frac{d^2 \sigma}{dv^2} + (1 - \Psi) \sigma = \Lambda,$$

en admettant la notation

$$(67) \quad \Phi - \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\sigma}{dv} = \Lambda.$$

Nous nous servirons, pour l'étude générale des mouvements, de l'équation (66) associée à la deuxième équation (55). Mais lorsque nous voudrions mettre en évidence les oscillations de σ qui sont dues plus particulièrement à l'excentricité de l'orbite, et celles qui sont dues plus particulièrement à son inclinaison variable, c'est-à-dire à G , nous utiliserons, au lieu de (66), l'équation (65) sous la forme canonique de Gylden-Lindstedt; par la substitution

$$(68) \quad \sigma = \frac{\varsigma}{\sqrt{G}},$$

d'où

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\varsigma}{dv} - \frac{1}{2G\sqrt{G}} \frac{dG}{dv} \varsigma,$$

on obtient

$$(69) \quad \frac{d^2 \varsigma}{dv^2} + \left[1 - \Psi + \frac{1}{4G^2} \left(\frac{dG}{dv} \right)^2 - \frac{1}{2G} \frac{d^2 G}{dv^2} \right] \varsigma = \Phi \sqrt{G},$$

qui ne contient pas la dérivée première $\frac{d\varsigma}{dv}$.

25. Partie principale de S et ordre de grandeur des fonctions Ψ et Φ . — Supposons que le potentiel soit de la forme

$$(70) \quad U = s + \varepsilon \Omega(s, \sin^2 \varphi) \quad (\varepsilon, \text{petit paramètre}),$$

La fonction S est telle que

$$S = \frac{1}{G^2} + \frac{\varepsilon}{G^2} \frac{\partial \Omega(S, \sin^2 \varphi)}{\partial S}.$$

Elle est peu différente de $\frac{i}{G^2}$, c'est-à-dire peu différente de $\frac{\cos^2 i}{C^2}$. Or, nous savons par la théorie des perturbations planétaires que les inclinaisons des orbites varient de quantités de l'ordre des forces perturbatrices dans un intervalle de temps assez long qui comprend un certain nombre de révolutions des planètes considérées. Soit i_0 une valeur moyenne de l'inclinaison durant cet intervalle de temps; nous pourrions prendre comme valeur moyenne de S

$$\frac{\cos^2 i_0}{C^2},$$

et S ne s'en écartera que de faibles quantités de l'ordre de ε . Donc, la partie principale de S est constante, durant tout intervalle de temps comparable à ceux qui sont envisagés dans les calculs classiques relatifs aux planètes et aux satellites.

Nous voyons en même temps qu'avec un potentiel de la forme (70), l'égalité (61) ramène l'étude des oscillations de s à celle des oscillations de σ , pourvu qu'on puisse négliger ε dans l'allure de la variation de s .

La fonction Φ est donnée par la formule (63); on reconnaît facilement qu'elle est de l'ordre de grandeur de ε .

Quant à la fonction Ψ , introduite par (64), en l'écrivant

$$\Psi = \frac{1}{G^2} \frac{\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial U(S, \varphi)}{\partial S}}{s - S},$$

on voit qu'elle est comparable à la dérivée partielle $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$; son ordre de grandeur est donc celui de ε .

En résumé, nous avons remplacé la première équation (55) par l'équation (66) dans laquelle Ψ et Λ sont des fonctions de l'ordre de ε ; au surplus, on peut considérer Λ comme une fonction de valeur moyenne nulle, tout au moins en première approximation.

Si l'on se rappelle (n° 20) que L est aussi de l'ordre de ε , on pourra imaginer une méthode simple d'approximations successives pour intégrer le système différentiel

$$\frac{d^2 \sigma}{d\nu^2} + (1 - \Psi)\sigma = \Lambda,$$

$$\frac{d^2 \mu}{d\nu^2} + (1 - L)\mu = 0.$$

26. **Expressions des fonctions S et Ψ dans quelques cas particuliers.** — Comme pour les trajectoires d'inclinaison nulle (n° 22), nous faisons *l'hypothèse essentielle que la différence $\frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s} - S$, qui figure en numérateur dans l'expression de Ψ , ne s'annule pas pour d'autres valeurs de s que celles qui sont définies par $s(\varphi) = S(\varphi)$.*

Les exemples suivants montrent que cette hypothèse est habituellement réalisée :

1° Prenons d'abord le potentiel de la formule (35) qui s'applique à un sphéroïde aplati et à un point éloigné; nous pouvons l'écrire

$$U = s + \varepsilon s^3 (1 - 3 \sin^2 \varphi),$$

en conservant seulement les deux premiers termes. Si nous convenons de négliger ε^2 , nous obtenons, sans difficulté,

$$S = \frac{1}{G^2} + \frac{3\varepsilon}{G^6} (1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

et

$$\Psi = \frac{\frac{3\varepsilon}{G^2} \left(s^2 - \frac{1}{G^4} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi)}{s - \frac{1}{G^2} - \frac{3\varepsilon}{G^6} (1 - 3 \sin^2 \varphi)} = \frac{3\varepsilon}{G^2} \left(s + \frac{1}{G^2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi).$$

2° Le potentiel (37) est applicable à tout satellite qui gravite à une distance suffisamment faible d'une planète; en ne conservant que les termes principaux, nous avons

$$U = s + \frac{\varepsilon}{s^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi).$$

Nous en déduisons (ε^2 étant négligé)

$$S = \frac{1}{G^2} - 2\varepsilon G^4 (1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

et

$$\Psi = \frac{2\varepsilon}{s^3} (G^4 s^2 + G^2 s + 1) (1 - 3 \sin^2 \varphi).$$

3° Exprimons le potentiel d'un amas globulaire sur une étoile qui en fait partie. Pour représenter la loi de variation de la densité stellaire telle qu'elle résulte de l'étude des clichés, nous emploierons

le procédé approximatif de Gylden ⁽¹⁾. Remplaçons l'amas réel par un amas fictif possédant un noyau central, sphérique, dont la densité, fonction du rayon, est rapidement décroissante à partir d'une certaine valeur $r = r_0$; ce noyau est entouré d'une atmosphère stellaire homogène ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati concentrique à la sphère. Le potentiel sur une étoile qui fait partie de l'amas, mais non du noyau central, a pour expression

$$(71) \quad U = \frac{fM}{r} - fmr^2(p^2 + q^2 \sin^2 \varphi);$$

m est la masse de l'amas supposé tout entier homogène; M est la masse du noyau central diminuée de ce qu'elle serait si le noyau avait la densité du reste de l'amas; p^2 et q^2 sont des constantes dont la signification est donnée dans la formule (40). En posant

$$\frac{m}{M} p^2 = \alpha, \quad \frac{m}{M} q^2 = \beta, \quad fM = 1,$$

la fonction U ci-dessus se met sous la forme

$$(72) \quad U = s - \frac{\alpha + \beta \sin^2 \varphi}{s^2}.$$

Le calcul de S et Ψ est tout à fait semblable à celui du deuxième exemple, si l'on néglige les termes du second ordre en α et β ; on obtient

$$S = \frac{1}{G^2} + 2G^4(\alpha + \beta \sin^2 \varphi),$$

$$\Psi = \frac{2}{s^3} (G^4 s^2 + G^2 s + 1) (-\alpha - \beta \sin^2 \varphi).$$

La fonction Ψ , cette fois, est toujours négative.

Si l'amas stellaire est homogène, on a $M = 0$, et la formule (72) est inutilisable; il faut prendre l'expression (71) qui devient, en posant

$$fm = 1,$$

$$U = -\frac{1}{s^2} (p^2 + q^2 \sin^2 \varphi).$$

⁽¹⁾ *Kungl. Svenska Vetenskapsakad. Handlingar*, Band 17, n° 1, 1879.

On a, dans ce cas,

$$S^4 = \frac{2}{G^2} (p^2 + q^2 \sin^2 \varphi)$$

et

$$\Psi = - \frac{2}{G^2} \frac{(p^2 + q^2 \sin^2 \varphi)}{s^3 S^3} \left(\frac{s^3 - S^3}{s - S} \right).$$

Il n'y a plus de petit paramètre analogue à ε ; Ψ est toujours négatif, et peut s'écarter notablement de zéro ⁽¹⁾.

27. Propriété importante de la fonction Ψ . — Examinons d'abord le cas des *trajectoires d'inclinaison nulle*. D'après l'hypothèse fondamentale faite au n° 23 et au début du n° 26, la

⁽¹⁾ La mise de s sous la forme $s = S + \sigma$ peut se faire d'une infinité de manières, suivant la définition qu'on adopte pour la fonction S . Au lieu de définir S par l'équation (62), nous aurions pu opérer, par exemple, comme ceci. Le potentiel étant exprimé à l'aide des variables r et z (ou s et z), posons

$$U(r, \sin^2 \varphi) = P(r, z^2).$$

Nous avons

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -s^2 \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{\partial P}{\partial z} = s \left(z \frac{\partial P}{\partial z} - s \frac{\partial P}{\partial s} \right).$$

Entre deux apsides consécutives, il y a un instant et un seul où l'on a

$$s = \frac{1}{G^2} \left(\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{z}{s} \frac{\partial P}{\partial z} \right).$$

Cela nous conduit à adopter la fonction S telle que

$$G^2 S = \frac{\partial P(S, z^2)}{\partial S} - \frac{z}{S} \frac{\partial P(S, z^2)}{\partial z}.$$

Avec les deux formes de potentiel

$$P = s + \varepsilon s^3 (1 - 3s^2 z^2), \quad P = s - \frac{\alpha}{s^2} - \beta z^2,$$

nous obtenons respectivement

$$S = \frac{1}{G^2} + \frac{3\varepsilon}{G^6} \left(1 - \frac{3z^2}{G^4} \right), \quad S = \frac{1}{G^2} + 2G^4 \left(\alpha + \beta \frac{z^2}{G^4} \right),$$

en négligeant les termes du second ordre en ε , α et β .

Les fonctions S ainsi déterminées ont les mêmes parties principales que celles que nous avons formées en partant de l'équation de définition (62), mais leurs oscillations n'ont pas la même allure, et cela rendrait difficile l'étude du déplacement des apsides au moyen de l'équation différentielle en σ (Chap. VIII) si l'on employait ces nouvelles fonctions S .

fonction

$$\Psi(s) = \frac{\frac{1}{G^2} \frac{dU}{ds} - s_0}{\sigma}$$

garde un signe constant, puisque le numérateur $\frac{1}{G^2} \frac{dU}{ds} - s_0$ et le dénominateur σ changent de signe en même temps. Pour $\sigma = 0$, on a

$$\Psi(s_0) = \frac{1}{G^2} \frac{d^2 U(s_0)}{ds_0^2}.$$

Le signe constant de Ψ est donc le signe de $\frac{d^2 U(s_0)}{ds_0^2}$.

Quand $\varphi = 0$, l'équation de Laplace-Poisson (33) s'écrit

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} + \frac{4\pi f \delta}{s^4} = 0.$$

et l'on a, d'après (42),

$$\left[\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} < 0.$$

Il en résulte que *si la trajectoire est extérieure aux masses attirantes, la dérivée seconde $\frac{d^2 U}{ds^2}$ est constamment positive, et aussi la fonction Ψ .*

Si le mouvement a lieu à l'intérieur d'une masse telle qu'un amas d'étoiles, la forme de l'équation de Poisson ne s'oppose pas à des valeurs négatives de $\frac{d^2 U}{ds^2}$. En fait, le troisième exemple du numéro précédent prouve que, *dans un amas globulaire, la dérivée $\frac{d^2 U}{ds^2}$ et la fonction Ψ sont négatives.*

Passons maintenant aux trajectoires d'inclinaisons différentes de zéro; nous constaterons que *si la dérivée seconde partielle $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ est de signe constant pour toutes les valeurs qu'est susceptible de prendre l'angle φ au cours du mouvement, ce signe appartient aussi à la fonction Ψ .*

Ecrivons, en effet,

$$\Psi = \frac{1}{G^2} \frac{\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial U(S, \varphi)}{\partial S}}{s - S}.$$

Quand $s - S$ tend vers zéro, Ψ tend vers la limite $\left[\frac{1}{G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right]_{s=S}$; donc, le signe de $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$, s'il est constant, donne celui de Ψ . Mais, en outre, la condition

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} > 0 \text{ (ou } < 0 \text{)}$$

entraîne que le numérateur de Ψ ne s'annule jamais quand s est différent de S ; en effet, $\frac{\partial U}{\partial s}$ étant, quel que soit φ , une fonction croissante (ou décroissante) de s , on a

$$\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial U(S, \varphi)}{\partial S} > 0 \text{ (ou } < 0 \text{)} \quad \text{pour } s > S,$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial U(S, \varphi)}{\partial S} < 0 \text{ (ou } > 0 \text{)} \quad \text{pour } s < S.$$

Avec les deux potentiels (35) et (37), si l'on ne tient compte que du premier terme perturbateur, et si le mouvement est tel que la latitude φ n'excède jamais, en valeur absolue, l'angle aigu dont le sinus est $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (c'est-à-dire 35 degrés environ), la dérivée partielle $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ et la fonction Ψ sont constamment positives. *La propriété de la fonction Ψ d'être positive quand le point mobile est extérieur aux masses et se déplace dans le plan de l'équateur, subsiste donc pour une orbite quelconque, pourvu que l'inclinaison ne dépasse pas une certaine limite.*

A l'intérieur d'un amas d'étoiles, au contraire, le potentiel (71) entraîne toujours

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} < 0, \quad \Psi < 0.$$

28. Propriétés des fonctions S et Ψ dans tous les champs de gravitation fixes. — Nous n'avons envisagé les fonctions S et Ψ qu'au sujet des mouvements dans les champs de forces possédant un axe de révolution et un équateur. Leur définition par les équations (62) et (64) s'étend aisément à d'autres formes de la fonction U . Considérons, en particulier, le mouvement d'un point soumis à l'attraction d'une masse centrale et d'un anneau de Gauss elliptique dont les dimensions surpassent celles de l'orbite du point

mobile, ou bien à l'attraction de deux anneaux de Gauss inversement homothétiques par rapport à l'origine, le rayon vecteur du point mobile restant constamment supérieur au plus grand rayon vecteur des deux anneaux. Le potentiel U est une fonction de $s, \theta, \sin^2 \varphi$. L'excentricité des anneaux sera désignée par e' .

Reprenant le raisonnement du n° 24, nous observons que la quantité

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv}$$

s'annule au moins une fois entre deux apsides consécutives, ce qui nous conduit à introduire une fonction S telle que

$$(73) \quad S = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \theta, \sin^2 \varphi)}{\partial S}.$$

La partie principale de S est la même, à des quantités près de l'ordre de ε , que la partie principale de $\frac{1}{G^2}$. Or, nous avons (voir n° 7)

$$(74) \quad \frac{1}{G^2} = \frac{\cos^2 i}{J^2} = \frac{\cos^2 i}{C^2 + 2 \int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta}.$$

La quantité $\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta}$, qui s'annule pour $e' = 0$ et pour $\varepsilon = 0$, est de l'ordre de petitesse de $\varepsilon e'$. L'intégrale $\int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$ est du même ordre, car le remplacement de la force perturbatrice par l'attraction d'un ou plusieurs anneaux de Gauss implique qu'on n'est pas au voisinage de commensurabilités simples entre les moyens mouvements des planètes troublantes et troublées (voir la première note du n° 29). Il en résulte que J^2 s'écarte peu de la valeur C^2 ; donc la fonction $\frac{1}{G^2}$ a la même partie principale que $\frac{\cos^2 i}{C^2}$, et comme la dérivée de l'inclinaison de l'orbite par rapport au temps ou à la variable angulaire est de l'ordre de ε , on peut considérer la fonction S comme constante, à des quantités près de l'ordre du coefficient de la force perturbatrice, durant un intervalle de temps qui embrasse un certain nombre de révolutions du corps céleste.

L'expression de S étant formée, la formule (64) donnera Ψ . Le

signe de la fonction Ψ est lié à celui de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$, quand ce dernier est constant. Il ne peut être question de signe négatif, car le signe serait encore négatif en supprimant les termes de U dus à l'ellipticité des anneaux, et cela est impossible (n° 27) à l'extérieur des masses attirantes. *Donc, quand $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ est constamment positif, la fonction Ψ est positive.*

Comme application, considérons le champ de forces défini par (38), en nous bornant aux deux premiers termes de U , et en simplifiant la notation des coefficients

$$U = s + \varepsilon s^3 \left[1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 e'^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi + \frac{5}{2} \cos^2 \varphi \cos 2\theta \right) \right].$$

Nous trouvons, en négligeant ε^2 ,

$$S = \frac{1}{G^2} + \frac{3\varepsilon}{G^6} \left[1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 e'^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi + \frac{5}{2} \cos^2 \varphi \cos 2\theta \right) \right]$$

et

$$\Psi = \frac{3\varepsilon}{G^2} \left(s + \frac{1}{G^2} \right) \left[1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 e'^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi + \frac{5}{2} \cos^2 \varphi \cos 2\theta \right) \right].$$

Si l'excentricité des anneaux n'est pas trop forte, et si la latitude du point mobile reste inférieure à une limite qu'il est facile d'évaluer, la fonction Ψ est toujours positive, comme l'indique, d'autre part, la dérivée seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$.

La propriété de la fonction S d'avoir une partie principale constante appartient à toutes les formes de potentiel considérées dans ce Mémoire. Quant au signe constant de la fonction Ψ (moyennant une limitation de l'inclinaison si ce signe est positif), c'est une propriété que possèdent seulement les champs de gravitation fixes, autrement dit, les potentiels ne contenant pas le temps.

29. Expression de Ψ quand U dépend périodiquement du temps.

— Voyons, en effet, ce que devient Ψ quand la fonction de forces est de la forme III du n° 13. Pour fixer les idées, nous traiterons le cas d'une planète P de masse très faible attirée par deux corps principaux P' et P'' qui décrivent des circonférences autour de

leur centre de gravité pris pour origine. Soient m' et m'' les masses de P' et P'' ; a' et a'' les rayons de leurs orbites situées dans le plan xOy ; n' leur vitesse angulaire commune. Nous supposons que le rayon vecteur de P reste très grand en regard de a' et a'' . En appelant H l'angle de OP avec OP' , nous avons

$$\frac{1}{PP'} = \frac{1}{r} + \frac{a'}{r^2} \cos H + \frac{a'^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right) + \dots,$$

$$\frac{1}{PP''} = \frac{1}{r} - \frac{a''}{r^2} \cos H + \frac{a''^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right) - \dots,$$

$$m' a' = m'' a'',$$

d'où

$$U = f \left(\frac{m'}{PP'} + \frac{m''}{PP''} \right) = \frac{f(m' + m'')}{r} + \frac{f(m' a'^2 + m'' a''^2)}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right),$$

en nous limitant aux termes écrits. Le développement de $\cos H$ en fonction de $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin n'(t - t_0)$, $\cos n'(t - t_0)$ conduit sans peine à l'expression

$$(75) \quad U = \frac{f(m' + m'')}{r} + \frac{f(m' a'^2 + m'' a''^2)}{4 r^3} [1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)]],$$

que nous simplifions, d'après notre convention du n° 14,

$$U = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} [1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)]].$$

Le calcul de la fonction S est immédiat (ε^2 est négligé)

$$S = \frac{1}{G^2} + \frac{3\varepsilon}{G^6} [1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)]].$$

Il en résulte

$$\Psi = \frac{3\varepsilon}{G^2} \left(s + \frac{1}{G^2} \right) [1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)]],$$

et l'on voit que, quelle que soit l'inclinaison de la trajectoire, la fonction Ψ sera alternativement positive et négative.

La présence de termes périodiques en t , jointe au fait que dans la relation

$$(74) \quad J^2 = G^2 \cos^2 i = G^2 + 2 \int p^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta,$$

la fonction représentée par l'intégrale indéfinie n'est pas forcément du même ordre de grandeur que la quantité soumise au signe $\int^{(1)}$, complique beaucoup l'étude des oscillations de σ , qui doit se faire au moyen de l'équation (66). Il y a là des difficultés supérieures à celles rencontrées par Gylden dans sa théorie de l'*Orbite intermédiaire de la Lune* ⁽²⁾. Aussi laisserons-nous de côté la variation des éléments des orbites dans les champs de forces du type

$$U(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta, \sin n't, \cos n't),$$

quelques cas particuliers étant, cependant, mis à part.

CHAPITRE IV.

STABILITÉ DES TRAJECTOIRES LORSQUE LES FORCES DÉRIVENT DU POTENTIEL $U(r, \sin^2 \varphi)$.

30. **Stabilité de Hill.** — Hill a proposé ⁽³⁾ de prendre comme première approximation du mouvement de la Lune une orbite décrite dans le champ dérivé de la fonction de forces

$$U = \frac{1}{r} + \frac{r^2}{2} [\lambda - (\lambda - \mu) \sin^2 \varphi],$$

λ et μ désignant deux constantes que l'on doit déterminer de manière que les moyens mouvements du nœud et du périégée soient les mêmes pour l'orbite intermédiaire considérée et pour l'orbite réelle. Cette orbite intermédiaire jouit de la propriété *d'être contenue tout entière, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, à*

(1) On sait que les commensurabilités approchées provoquent l'apparition de « petits diviseurs » d'intégration. Des termes d'un certain ordre de petitesse se trouvent ainsi affectés de forts coefficients, et sont comparables à des termes d'ordre moins élevé.

(2) *Acta mathematica*, t. 7, p. 125-172. Dans ce mémoire, l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire sont considérées comme des quantités d'ordre $\frac{1}{3}$ par rapport à l'action perturbatrice du Soleil; en outre, il n'y a aucune commensurabilité approchée simple entre les moyens mouvements.

(3) *Astronomical Journal*, n° 419, vol. XVIII, nov. 1897.

l'intérieur d'une surface genre tore, de révolution autour de Oz, symétrique par rapport au plan xOy et laissant les masses attirantes à son extérieur. Toutes les fois qu'une trajectoire se comportera de cette manière, nous dirons qu'elle est stable au sens de Hill ⁽¹⁾.

Considérons le système différentiel (53), qui définit le mouvement relatif dans le plan méridien (ρ, z) , avec

$$F = E(\rho, z) - \frac{C^2}{2\rho^2},$$

comme fonction de forces.

Les positions d'équilibre du point (ρ, z) sont définies par les équations

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial E}{\partial \rho} + \frac{C^2}{\rho^3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0,$$

qui ont toujours des solutions réelles. Ces positions d'équilibre relatif correspondent, dans l'espace, à des trajectoires circulaires d'axe Oz décrites d'un mouvement uniforme. Le cas le plus simple est celui d'une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance, qui donne une trajectoire képlérienne. On a alors

$$F = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \frac{C^2}{2\rho^2},$$

et le point d'équilibre relatif a pour coordonnées $\rho = C^2, z = 0$. L'équilibre est stable. On aura encore un point d'équilibre stable, voisin de celui-là, si l'on remplace F par $F + \varepsilon F_1$, les fonctions F et F_1 étant régulières au point $(\rho = C^2, z = 0)$, et ε étant un paramètre suffisamment petit.

Le fait qu'il existe une position d'équilibre stable dans le plan méridien (ρ, z) prouve que si le point mobile a une position initiale assez voisine de la circonférence décrite par le point d'équilibre tournant autour de Oz, et si les composantes $\frac{d\rho}{dt}, \frac{dz}{dt}$ de la vitesse sont, à l'instant initial, très petites, le point matériel

(1) La dénomination « stabilité de Lagrange » doit être réservée, suivant la pensée de cet auteur, aux orbites dont les éléments s'expriment, par rapport au temps, en séries trigonométriques uniformément convergentes, ces séries étant entières par rapport aux masses perturbatrices.

restera, au cours de son mouvement, à l'intérieur d'un anneau engendré par la rotation autour de Oz d'une petite aire du plan (ρ, z) entourant le point d'équilibre considéré. C'est la stabilité de Hill.

L'intégrale des forces vives s'écrit

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2(F + h);$$

elle entraîne

$$F + h \geq 0.$$

Si le point (ρ, z) reste à sa position d'équilibre stable, la constante des forces vives est telle que $F + h = 0$; s'il reste dans le voisinage de cette position, on a $F + h > 0$ et la région définie par cette inégalité est intérieure à la courbe fermée $F + h = 0$; cette courbe cesse d'être fermée, ou bien rencontre les corps attirants, quand h s'écarte trop de la valeur qui correspond à l'équilibre. Il y a donc lieu, dans chaque cas particulier, d'étudier les courbes $F + h = 0$ dépendant du paramètre h qu'on fera croître à partir de la valeur (négative) pour laquelle la courbe $F + h = 0$ se réduit au point d'équilibre. Dans cette étude, la constante des aires a une valeur donnée, dont dépend le rayon ρ correspondant au point d'équilibre.

Quel que soit le potentiel considéré, il existe, pour chaque valeur convenable de h , une solution périodique équatoriale (n° 22) représentée par la corde $z = 0$ de la courbe fermée $F + h = 0$. En effet, aux deux extrémités du segment de droite qui correspond à cette solution, on doit avoir

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad F + h = 0.$$

D'une manière plus générale, la courbe $F + h = 0$, pour l'ensemble des trajectoires correspondant à une valeur donnée de h , est le lieu géométrique des apsides qui coïncident avec les maxima de $|\varphi|$.

31. Application aux mouvements dans le champ de forces

$U = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi)$. — Prenons le potentiel

$$U = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \quad (\varepsilon > 0),$$

qui est celui (35) d'un sphéroïde aplati, réduit à ses termes principaux, ou encore, d'après (75), le potentiel moyen d'un système de deux corps décrivant une orbite circulaire l'un autour de l'autre, potentiel équivalent à celui de deux anneaux circulaires de Gauss. Dans les deux cas, il faut supposer que le point attiré est à une distance assez grande.

Au lieu de U , écrivons

$$E = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{\varepsilon(\rho^2 - 2z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}};$$

nous avons

$$F = E - \frac{C^2}{2\rho^2}.$$

Les positions d'équilibre relatif dans le plan (ρ, z) sont définies par

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Or

$$F = \frac{1}{\rho} - \frac{C^2}{2\rho^2} + \frac{\varepsilon}{\rho^3} - \frac{z^2}{2\rho^3} - \frac{9\varepsilon z^2}{2\rho^5} + \frac{3z^4}{8\rho^5} + \frac{75\varepsilon z^4}{8\rho^7} + \dots,$$

ce qui donne, pour les positions d'équilibre

$$z = 0, \quad \rho^2 - C^2\rho + 3\varepsilon = 0.$$

C est du même ordre de grandeur que $\sqrt{\rho}$; ε est donc petit par rapport à C^2 . L'équation précédente, en ρ , ayant ses racines réelles, il existe deux positions d'équilibre relatif qui correspondent à des trajectoires circulaires d'axe Oz décrites par le point (ρ, z) d'un mouvement uniforme :

$$1^{\text{re}} \text{ position} \dots \quad \rho = \frac{C^2 - \sqrt{C^4 - 12\varepsilon}}{2}; \quad \text{en négligeant } \varepsilon^2 \quad \rho = \frac{3\varepsilon}{C^2},$$

$$2^{\text{e}} \text{ position} \dots \quad \rho = \frac{C^2 + \sqrt{C^4 - 12\varepsilon}}{2}; \quad \text{en négligeant } \varepsilon^2 \quad \rho = C^2 - \frac{3\varepsilon}{C^2}.$$

Pour reconnaître si ces positions sont stables, formons les

dérivées secondes de F par rapport à ρ et à z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} &= \frac{1}{\rho^5} (2\rho^2 - 3C^2\rho + 12\varepsilon) && \text{avec } z = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial z} &= 0 && \text{avec } z = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \frac{1}{\rho^5} (-\rho^2 - 9\varepsilon) < 0 && \text{avec } z = 0.\end{aligned}$$

Dans la première position, on a, en négligeant ε^2 ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = \frac{3\varepsilon}{\rho^5} > 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial z} \right)^2 < 0;$$

F n'est ni maximum ni minimum; la position est instable. Elle n'a qu'un sens théorique, car la valeur $\rho = \frac{3\varepsilon}{C^2}$ est trop petite pour représenter la distance d'une planète; d'ailleurs il est impossible, pour une si faible valeur du rayon vecteur, d'adopter le développement de U d'où nous sommes partis (1).

Dans la deuxième position, on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = \frac{3\varepsilon - C^4}{2\rho^5} < 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial z} \right)^2 > 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ étant négatives, il y a pour F un maximum au sens strict, et la position d'équilibre est stable.

Calculons la valeur de h qui correspond au point d'équilibre stable. En faisant $\rho = C^2 - \frac{3\varepsilon}{C^2}$, avec $z = 0$, dans l'équation

(1) En prenant l'expression exacte du potentiel d'un ellipsoïde homogène de révolution aplati, on peut démontrer l'instabilité des trajectoires circulaires voisines du bord équatorial, lorsque l'excentricité de la section méridienne est au moins égale à 0,834. M. B. Lindblad a tiré parti de ce fait pour expliquer la figure des nébuleuses spirales.

$F + h = 0$, nous obtenons la valeur

$$h = -\frac{1}{2C^2} - \frac{\varepsilon}{C^6},$$

approchée à des quantités près de l'ordre de ε^2 , et pour laquelle l'équation

$$F + h = 0,$$

qui s'écrit, en coordonnées polaires,

$$\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3}(1 - 3\sin^2\varphi) - \frac{C^2}{2r^2\cos^2\varphi} + h = 0,$$

admet la racine double

$$r = C^2 - \frac{3\varepsilon}{C^2} \quad (\text{avec } \varphi = 0).$$

L'équation étant du troisième degré en r (avec $\varphi = 0$), il y a une troisième racine, égale à

$$-\frac{1}{h} - 2\left(C^2 - \frac{3\varepsilon}{C^2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{2\varepsilon}{C^2};$$

elle est très faible.

Lorsque h est un peu supérieur à $-\frac{1}{2C^2} - \frac{\varepsilon}{C^6}$, l'équation $F + h = 0$ (en r et φ) admet, pour des valeurs de φ assez petites, deux racines positives voisines qui correspondent à un ovale fermé entourant le point d'équilibre (voir figure); la troisième racine reste positive et très faible tant que $\sin^2\varphi$ est inférieur à $\frac{1}{3}$, s'annule quand $\sin^2\varphi = \frac{1}{3}$ et devient négative pour $\sin^2\varphi > \frac{1}{3}$. Si h continue à croître, l'ovale se dilate; pour $h = -\frac{1}{3C^2}$, il est tangent aux droites $\sin^2\varphi = \frac{1}{3}$; il est coupé par ces droites lorsque h dépasse cette valeur. Quand h tend vers zéro, l'équation $F + h = 0$, où l'on fait $\varphi = 0$, a sa plus grande racine qui tend vers l'infini; l'ovale devient très grand.

Pour $h \geq 0$, il n'y a plus de courbe fermée entourant le point d'équilibre stable.

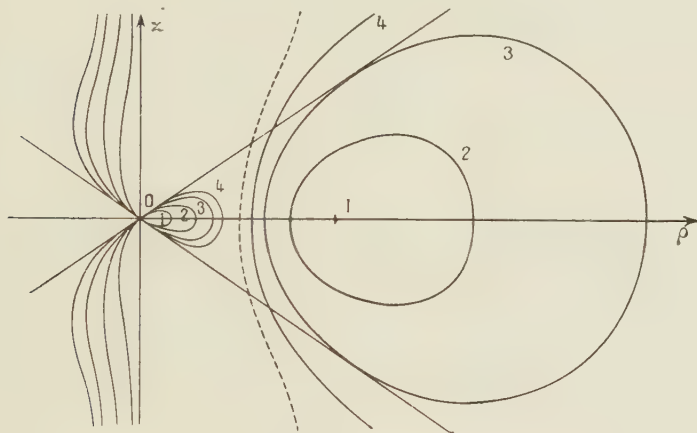
Il est important de remarquer que chaque ovale est sans point

commun avec les autres ; en effet, le système d'équations

$$F + h = 0, \quad \frac{d}{dh}(F + h) = 0,$$

qui détermine les points d'intersection d'un ovale avec l'ovale infiniment voisin, est sans solution.

Fig. 2.



Courbe 1 : $h = -\frac{1}{2C^2} - \frac{\varepsilon}{C^6}$.

Courbe 2 : $-\frac{1}{2C^2} - \frac{\varepsilon}{C^6} < h < -\frac{1}{3C^2}$.

Courbe 3 : $h = -\frac{1}{3C^2}$.

Courbe 4 : $-\frac{1}{3C^2} < h < 0$.

Les conditions pour que la trajectoire dans l'espace possède la stabilité de Hill sont :

1° que la constante des forces vives soit négative et non supérieure, en valeur absolue, à $\frac{1}{2C^2} + \frac{\varepsilon}{C^6}$;

2° que la position initiale du point mobile soit intérieure à un ovale $F + h = 0$;

3° que la composante de la vitesse initiale dans le plan méridien soit inférieure à $\sqrt{2F}$.

Ces trois conditions sont suffisantes. La troisième résulte de l'équation des forces vives, puisque le carré de la composante

méridienne de la vitesse est $2(F + h)$, et que h a pour limite supérieure zéro. Quant à la deuxième condition, elle s'exprime d'une manière simple en considérant l'ovale limite, tracé en pointillé sur la figure, qui correspond à la valeur $h = 0$. Cet ovale, qui s'ouvre à l'infini, est extérieur à tous les autres; il constitue une branche de la courbe

$$2r^2 \cos^2 \varphi - C^2 r + 2\varepsilon(1 - 3\sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi = 0,$$

dont l'équation se décompose en deux

$$r = \frac{2\varepsilon}{C^2} \cos^2 \varphi (1 - 3\sin^2 \varphi)$$

et

$$r = \frac{C^2}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{2\varepsilon}{C^2} \cos^2 \varphi (1 - 3\sin^2 \varphi).$$

La première donne de faibles valeurs de r ; c'est la deuxième qui représente l'ovale limite. Il faut et il suffit, pour qu'un point (r, φ) soit intérieur à un ovale $F + h = 0$, que son rayon vecteur soit supérieur au rayon vecteur de l'ovale, limite pour la même valeur de φ . Si r_0 et φ_0 désignent les coordonnées initiales du mobile, les deuxième et troisième conditions pour la stabilité de Hill s'écrivent

$$r_0 > \frac{C^2}{2 \cos^2 \varphi_0} - \frac{2\varepsilon}{C^2} \cos^2 \varphi_0 (1 - 3\sin^2 \varphi_0),$$

$$\left(\frac{dr_0}{dt}\right)^2 + r_0^2 \left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)^2 < 2 \left[\frac{1}{r_0} + \frac{\varepsilon}{r_0^3} (1 - 3\sin^2 \varphi_0) \right] - \frac{C^2}{r_0^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

Remarquons que si h est voisin de $-\frac{1}{2C^2} - \frac{\varepsilon}{C^6}$, l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite képlérienne osculatrice resteront toujours faibles; elles pourront, au contraire, avoir de fortes valeurs si h est voisin de zéro; on s'en rend compte par la considération des surfaces annulaires.

32. Mouvement d'une étoile faisant partie d'un amas. — La méthode du numéro précédent peut s'appliquer aux amas globulaires. Le cas le plus simple est celui d'un amas homogène, ayant la forme d'un sphéroïde aplati, qui produit sur un point intérieur le potentiel

$$E = -fm[p^2 \rho^2 + (p^2 + q^2)z^2];$$

p^2 et q^2 sont des constantes dont la signification est donnée par (40). Les équations du mouvement sont à variables séparées

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2fmp^2 x = \frac{d^2 y}{dt^2} + 2fmp^2 y = \frac{d^2 z}{dt^2} + 2fm(p^2 + q^2)z = 0;$$

elles définissent des oscillations sinusoïdales. Il y a périodicité pour le mouvement en (x, y) projeté sur le plan de l'équateur, et quasi-périodicité pour le mouvement dans l'espace. La recherche de la position méridienne d'équilibre stable correspondant à une constante des aires donnée est complètement inutile, de même que la construction des courbes $F + h = 0$.

Le problème change de caractère quand il s'agit d'un amas à noyau central, dont l'attraction sur un de ses points dérive du potentiel (72). On a

$$E = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \alpha(\rho^2 + z^2) - \beta z^2 \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

$$F = E - \frac{C^2}{2\rho^2}.$$

Les points d'équilibre relatif dans le plan (ρ, z) sont donnés par

$$z = 0, \quad C^2 - \rho - 2\alpha\rho^3 = 0.$$

L'équation en ρ n'admet qu'une racine positive, dont le développement suivant les puissances de α est

$$\rho = C^2 - 2\alpha C^8 + 16\alpha^2 C^{14} - \dots,$$

valable seulement si α est petit. En exprimant que cette valeur de ρ est inférieure au rayon équatorial de l'amas, on a une condition d'inégalité à laquelle C doit satisfaire.

La position d'équilibre correspondant à la racine ci-dessus est stable, car

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)_{z=0} = -\frac{1}{\rho^3} - 2(\alpha + \beta) < 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial z} \right)_{z=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \right)_{z=0} = \frac{2}{\rho^3} - 2\alpha - \frac{3C^2}{\rho^4},$$

et, lorsqu'on remplace ρ par la racine positive de

$$f(\rho) = C^2 - \rho - 2\alpha\rho^4 = 0,$$

on a

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\right)_{z=0} = \frac{2\rho - 2\alpha\rho^4 - 3C^2}{\rho^4} = \frac{3\rho - 4C^2}{\rho^4},$$

qui est négatif, car

$$f(0)f\left(\frac{4C^2}{3}\right) < 0,$$

d'où

$$0 < \rho < \frac{4C^2}{3}.$$

La valeur de h correspondant à l'équilibre relatif s'obtient en substituant la même valeur de ρ , avec $z=0$, dans l'équation $F+h=0$. On obtient

$$h = \frac{2C^2 - 3\rho}{2\rho^2} = -\frac{1}{2C^2} + \alpha C^4 + \dots,$$

valeur négative si α est suffisamment petit, et pour laquelle la courbe $F+h=0$ se réduit à un point. Si h croît à partir de cette valeur, la courbe $F+h=0$, d'équation

$$\frac{1}{r} - r^2(\alpha + \beta \sin^2 \varphi) - \frac{C^2}{2r^2 \cos^2 \varphi} + h = 0,$$

représente un ovale entourant le point d'équilibre et se dilatant quand h augmente; il n'y a pas d'autres branches de courbe, car l'équation ci-dessus, du quatrième degré en r , a toujours deux racines imaginaires en vertu du théorème de Descartes. La borne supérieure de h est atteinte lorsque la courbe $F+h=0$ touche la demi-ellipse qui limite la section de l'amas par le plan (ρ, z) , et qui a pour équation

$$\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Mais la trajectoire d'une étoile de l'amas ne pourra être dite stable ⁽¹⁾ que si elle ne rencontre pas le noyau central; dans le

(1) La stabilité de Hill n'a été définie que pour les trajectoires ne rencontrant pas les corps attirants; elle se traduit par la limitation des coordonnées et des vitesses. Lorsque le mouvement a lieu à l'intérieur d'une masse attirante, on peut encore dire qu'il y a stabilité au sens de Hill si les vitesses sont bornées.

cas contraire, les chocs peuvent avoir une influence capitale qu'il est bien difficile de mettre en lumière.

Sans faire la discussion relative aux ovales $F + h = 0$, nous remarquerons seulement que *l'intervalle de variation de h peut s'étendre jusqu'à une borne supérieure positive, et, si l'amas est homogène, toutes les valeurs utilisables de h sont positives.*

Quand les coefficients α et β ont des valeurs considérables (et aussi, bien entendu, quand l'amas est homogène) les trajectoires sont caractérisées par de forts aplatissements : les équations en termes finis, dans le cas limite d'un amas homogène, en donnent la preuve immédiate.

33. Caractère oscillatoire du rayon vecteur dans les champs de forces $U(r, \sin^2 \varphi)$. — Dans tout ce qui suit, nous supposons *les conditions initiales choisies de manière que la trajectoire possède la stabilité de Hill.* Il est évident, par cette stabilité et d'après les équations du mouvement, que les coordonnées rectangulaires et polaires, et leurs dérivées des divers ordres, restent bornées sur la trajectoire. En écartant les orbites circulaires du plan de l'équateur, on a, pour n'importe quel mouvement, la propriété suivante :

Lorsque t (ou θ , ou v) tend vers $\pm \infty$, le rayon vecteur r et sa projection ρ ne tendent vers aucune limite.

La démonstration se fait au moyen du théorème établi par M. Hadamard pour aborder l'étude générale des trajectoires de la dynamique (1). Considérons d'abord la première équation (54)

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - \frac{1}{C^2} \frac{\partial E(u, z)}{\partial u} = 0.$$

Si u tend vers une limite u_0 quand θ tend vers $\pm \infty$, comme ses dérivées jusqu'à l'ordre trois restent bornées, les dérivées première

(1) Si, lorsque la variable t augmente indéfiniment, la fonction $V(t)$ tend vers une limite et que ses $(n+1)$ premières dérivées existent et restent finies, les n premières d'entre elles tendent vers zéro (voir *Journal de Liouville*, 5^e série, t. III, 1897).

et seconde tendent vers zéro; la limite u_0 est donc définie par

$$u_0 = \frac{1}{C^2} \frac{\partial E(u_0, z)}{\partial u_0};$$

elle doit être indépendante de z . Il faut donc que, pour tous les points du cylindre $u = u_0$, la composante de l'attraction perpendiculaire à Oz , qui est $\frac{\partial E}{\partial \rho_0}$, ou $-u_0^2 \frac{\partial E}{\partial u_0}$, soit constante et différente de zéro; or, cela est impossible, puisque l'attraction s'annule à l'infini sur le cylindre.

Examinons ensuite la deuxième équation du groupe (54). La fonction W est négative (voir n° 20) et bornée. Si ϖ tend vers une limite pour $\theta \rightarrow \pm \infty$, ses dérivées première et seconde tendent vers zéro, et la limite de ϖ est zéro; on peut dire aussi que si φ tend vers une limite pour $\nu \rightarrow \pm \infty$, cette limite est zéro.

Appliquons le théorème de M. Hadamard à la première équation (55)

$$\frac{d^2 s}{d\nu^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{d\nu} \frac{ds}{d\nu} + s - \frac{1}{C^2} \frac{\partial U(s, \varphi)}{\partial s} = 0,$$

dans laquelle

$$G = \frac{C}{\cos i}.$$

En admettant que s tende vers une limite quand ν tend vers $\pm \infty$, $\frac{d^2 s}{d\nu^2}$ et $\frac{ds}{d\nu}$ tendent vers zéro, et la limite de s est définie par

$$s_0 = \frac{1}{C^2} \frac{\partial U(s_0, \varphi)}{\partial s_0}.$$

Si φ ne tend vers aucune limite, il faut que

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial U}{\partial s_0} = \frac{\cos^2 i}{C^2} \frac{\partial U}{\partial s_0}$$

soit indépendant de φ , et cela ne peut se produire que si U est indépendant de φ (force centrale, inclinaison constante); ce n'est pas le cas que nous étudions. Il faut donc que φ tende vers une limite, et cette limite est zéro. Désignons par r_0 l'inverse de s_0 ; les quantités $r = r_0$, φ , $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ (ou $\frac{dr}{d\nu}$, $\frac{d\varphi}{d\nu}$) ainsi que les dérivées secondes de r et φ , tendent vers zéro; le point ($r = r_0$, $\varphi = 0$) est une

position d'équilibre relatif dans le plan méridien (r, φ) . Mais une telle position est stable (voir n° 30) et ne peut être atteinte asymptotiquement; nous sommes donc forcés d'admettre que $r - r_0$ et φ sont constamment nuls (trajectoire circulaire dans le plan de l'équateur) ou que r ne tend vers aucune limite et admet une infinité de maxima et minima.

En résumé, ρ , r , et φ (voir n° 46) sont multioscillants quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, mais rien ne s'oppose à ce que φ tende vers zéro ⁽¹⁾ pour $t \rightarrow \pm \infty$, au lieu que ρ et r n'ont aucune limite.

34. Partie principale du grand axe de l'orbite. — Le potentiel étant de la forme

$$\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \varphi) \quad (\varepsilon \text{ petit}),$$

l'équation (16) de Laplace s'écrit

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} = 2h + \frac{1}{r} + \varepsilon \left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right).$$

Soit t_1 l'instant d'un minimum r_1 de r , et t un instant postérieur à t_1 et antérieur au premier maximum suivant; nous tirons de l'équation précédente

$$r^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2h(r^2 - r_1^2) + 2(r - r_1) + 2\varepsilon \int_{r_1}^r \left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) r dr.$$

L'intégrale

$$\int_{r_1}^r \left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) r dr$$

est égale au produit de $r - r_1$ par une valeur moyenne de la fonction $\left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) r$ dans l'intervalle considéré, et si t_2 est l'instant du maximum r_2 qui suit le minimum r_1 , on a

$$0 = r_2^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2_{t=t_2} = 2(r_2 - r_1)[1 + h(r_1 + r_2) + \varepsilon K];$$

⁽¹⁾ Il existe, effectivement, des trajectoires asymptotiques au plan de l'équateur pour $t \rightarrow +\infty$ et pour $t \rightarrow -\infty$ (voir Chap. suivant, n° 40).

K, valeur moyenne de la fonction $\left(2\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)r$, dépendante de r_1 et r_2 , est bornée quel que soit t . On déduit de cette équation

$$r_1 + r_2 = -\frac{1}{h} - \frac{\varepsilon K}{h}.$$

Ce résultat, emprunté à Fatou (Mémoire cité), exprime que *la somme de deux valeurs stationnaires consécutives de r est constante, à des quantités près de l'ordre des masses perturbatrices, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$. La partie principale de cette somme, c'est-à-dire $-\frac{1}{h}$, est aussi la partie principale du grand axe de l'orbite osculatrice*, ce dernier ne différant de $r_1 + r_2$ que par des termes contenant ε en facteur.

35. Stabilité à la Poisson. — Considérons, dans le plan méridien, les trajectoires du point (ρ, z) pour les valeurs de la constante des forces vives comprises entre les limites $h + \eta$ et $h - \eta$; h et η sont arbitraires, mais convenablement choisis pour que dans tous les mouvements correspondants les coordonnées et les vitesses soient limitées (n° 30). Le point de l'espace à quatre dimensions qui a pour coordonnées $\rho, z, \frac{d\rho}{dt} = \rho', \frac{dz}{dt} = z'$, reste dans une région fermée, ou *domaine de Poincaré* suivant une appellation usuelle; c'est la région comprise entre les deux surfaces fermées

$$\frac{1}{2}(\rho'^2 + z'^2) = F + h - \eta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\rho'^2 + z'^2) = F + h + \eta.$$

Les équations canoniques du mouvement admettent l'invariant intégral positif

$$\iiint d\rho' dz' d\rho dz,$$

qui, étendu au domaine de Poincaré, est fini; il en résulte que le point (ρ, z, ρ', z') traverse une infinité de fois, avant et après un instant donné t_0 , un volume arbitrairement petit entourant le point $(\rho_0, z_0, \rho'_0, z'_0)$ qui figure les conditions à l'instant t_0 . Il y a exception pour certaines conditions initiales exceptionnelles, figurées par un ensemble de points de mesure nulle.

La propriété que nous venons d'énoncer est la stabilité à la

Poisson ⁽¹⁾. Donc la stabilité de Hill entraîne pour presque toutes les trajectoires la stabilité à la Poisson.

36. Intégration des équations du mouvement par approximations successives. — Nous prendrons comme équations du mouvement le système différentiel suivant, en coordonnées de Hansen et avec ν comme variable indépendante

$$(76) \quad \begin{cases} \frac{d^2\sigma}{d\nu^2} + (1 - \Psi)\sigma = \Lambda, \\ \frac{d^2\mu}{d\nu^2} + (1 - L)\mu = 0, \end{cases}$$

plus l'équation

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{1}{G s^2},$$

qui introduit le temps.

Le potentiel est supposé de la forme (70), et nous nous plaçons dans le cas d'un mouvement stable au sens de Hill ⁽²⁾; L , Λ et Ψ sont alors des fonctions bornées, qui restent de l'ordre de grandeur de ε (voir n° 25); σ est aussi, naturellement, une fonction bornée.

Appliquons l'algorithme de Lagrange, en partant de la solution du système (76) qu'on obtient pour $\varepsilon = 0$, les constantes d'intégration étant fixées par les conditions initiales; nous avons ainsi

$$\sigma_0 = \frac{e \cos^2 \alpha}{C^2} \cos(\nu - \beta), \quad \mu_0 = \sin \alpha \sin(\nu - \gamma),$$

qui définissent une orbite elliptique d'éléments

$$\frac{C^2}{(1 - e^2) \cos^2 \alpha}, \quad e, \quad \alpha, \quad \gamma, \quad \beta.$$

Pour calculer les valeurs de première approximation, σ_1 et μ_1 , nous devons porter les expressions ci-dessus de σ_0 et μ_0 dans L , Λ et Ψ et intégrer le système qui se déduit de (76) par cette substitution. L , Λ et Ψ s'expriment en fonction de σ et μ de la manière suivante valable pour toutes les approximations successives.

⁽¹⁾ Voir POINCARÉ, *Méth. Nouv.*, t. III, Chap. XXVI.

⁽²⁾ Nous admettons également que le mouvement non perturbé est stable, c'est-à-dire elliptique. Il en est toujours ainsi si l'on n'est pas au voisinage de la valeur limite de h pour laquelle l'ovale $F + h = 0$ (voir n° 31) cesse d'être fermé, ou rencontre l'axe des z , ou bien les masses attirantes.

D'abord, d'après (7)

$$\sin^2 i = \mu^2 + \left(\frac{d\mu}{dv} \right)^2,$$

d'où

$$\frac{1}{G^2} = \frac{\cos^2 i}{C^2} = \frac{1 - \mu^2 - \left(\frac{d\mu}{dv} \right)^2}{C^2}.$$

On a ensuite la fonction S par la résolution de l'équation (62)

$$S = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \sin^2 i)}{\partial S} = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \mu^2)}{\partial S},$$

puis s (inverse de r) par la formule $s = S + \sigma$. La fonction L, donnée par (46), s'en déduit immédiatement

$$L = \frac{2}{G^2 s^2} \cos^2 i \frac{\partial U}{\partial (\mu^2)}.$$

Le calcul de Λ résulte de la formule (67)

$$\Lambda = - \frac{d^2 S}{dv^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{dS}{dv} - \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\sigma}{dv} = - \frac{d^2 S}{dv^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv},$$

et le calcul de Ψ se fait, sans transformation, par la formule (64)

$$\Psi = \frac{\frac{1}{G^2} \frac{\partial U(s, \mu^2)}{\partial s} - S}{\sigma}.$$

Revenons à la première approximation. La substitution de σ_0 et μ_0 dans L, Λ et Ψ donne

$$L_0, \Lambda_0, \Psi_0 \text{ sont fonctions périodiques de } v, \text{ de période } 2\pi,$$

et nous avons à intégrer le système

$$(77) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \sigma_1}{dv^2} + (1 - \Psi_0) \sigma_1 = \Lambda_0, \\ \frac{d^2 \mu_1}{dv^2} + (1 - L_0) \mu_1 = 0. \end{cases}$$

Il s'agit là d'équations différentielles linéaires du second ordre, ne contenant pas la dérivée première de la fonction inconnue, et ayant comme coefficient de cette fonction une quantité périodique positive. Ce type d'équations, envisagé pour la première fois par

Mathieu qui a pris pour L_0 , Λ_0 et Ψ_0 des fonctions sinusoïdales, est devenu classique depuis les recherches de Lindstedt, Gylden et Hill. Dans le cas qui nous occupe, toutes les solutions des équations (77) sont bornées pourvu que les conditions initiales ne soient pas dans le voisinage de certains systèmes de valeurs singulières. La méthode d'approximations successives est d'ailleurs assez souple pour éviter que s'introduisent des fonctions

$$|\mu_1|, |\mu_2|, \dots, |\mu_n|, \dots, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$$

dont la valeur absolue n'aurait pas de limite; on remplacera, par exemple, la première équation (77) par

$$\frac{d^2 \sigma_1}{d\nu^2} + (1 + \varepsilon c_0 - \Psi_0) \sigma_1 = \Lambda_0 + \varepsilon c_0 \sigma_0,$$

déduite de

$$\frac{d^2 \sigma}{d\nu^2} + (1 + \varepsilon c_0 - \Psi) \sigma = \Lambda + \varepsilon c_0 \sigma,$$

et l'on prendra pour la constante c_0 une valeur convenable. Quant à la deuxième équation (77), elle a toujours ses solutions bornées ⁽¹⁾.

Du fait que σ_1 et μ_1 sont des quantités bornées on déduit qu'elles s'expriment en fonction de ν par des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes

$$\sigma_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k \cos[(\lambda + k)\nu + \lambda_0], \quad \mu_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k \cos[(l + k)\nu + l_0],$$

qui représentent des fonctions quasi-périodiques du second ordre de la variable ν ; la fonction σ_1 a pour fréquences fondamentales λ et 1; la fonction μ_1 possède comme fréquences l et 1. Les fréquences l et λ , qui sont voisines de 1, et les rapports $\frac{\alpha_k}{\alpha_0}$, $\frac{\alpha_k}{\alpha_0}$, se calculent par la méthode connue de Hill ⁽²⁾.

Ayant obtenu σ_1 et μ_1 comme résultats de la première approxi-

⁽¹⁾ L'équation de Mathieu sans second membre a toutes ses solutions bornées quand l'intervalle de variation de $m^2 Q$ (Q , coefficient périodique de l'inconnue, de période $m\pi$) ne contient pas le carré d'un nombre entier (critère connu).

⁽²⁾ TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, t. III, p. 18 et suiv.

mation, considérons le système différentiel

$$(78) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \sigma_2}{d\nu^2} + (1 - \Psi_1) \sigma_2 = \Lambda_1, \\ \frac{d^2 \mu_2}{d\nu^2} + (1 - L_1) \mu_2 = 0, \end{cases}$$

qui fournira les expressions des inconnues en deuxième approximation. C'est un système linéaire du second ordre à coefficients quasi-périodiques, et chaque équation du système est du type de P. Bohl ⁽¹⁾, n'admettant que des solutions bornées, ou pouvant se remplacer, dans le cas contraire, par une équation telle que

$$\frac{d^2 \sigma_2}{d\nu^2} + (1 + \varepsilon c_1 - \Psi_1) \sigma_2 = \Lambda_1 + \varepsilon c_1 \sigma_1$$

(c_1 , constante convenable), n'admettant que des solutions bornées. Toute solution (σ_2 , μ_2) est de la forme

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{c}{\sqrt{P(\nu)}} \cos \left(\int_{\nu_0}^{\nu} P(\nu) d\nu \right) + Q(\nu), \\ \mu_2 &= \frac{c'}{\sqrt{R(\nu)}} \cos \left(\int_{\nu'_0}^{\nu} R(\nu) d\nu \right); \end{aligned}$$

$P(\nu)$, $Q(\nu)$ et $R(\nu)$ sont des fonctions quasi-périodiques à trois fréquences, que nous n'avons malheureusement aucun moyen de déterminer; la représentation de σ_2 et μ_2 ne peut se faire que d'une manière approchée à l'aide de séries divergentes ⁽²⁾ asymptotiques. Il n'est pas certain que σ_2 et μ_2 soient des fonctions quasi-périodiques; elles le sont si

$$\int_0^{\nu} P(\nu) d\nu = m\nu + \text{fonction quasi-périodique de } \nu,$$

et

$$\int_0^{\nu} R(\nu) d\nu = m'\nu + \text{fonction quasi-périodique de } \nu,$$

relations dans lesquelles m et m' désignent les valeurs moyennes des fonctions $P(\nu)$ et $R(\nu)$. Il semble cependant que σ_2 et μ_2 sont

⁽¹⁾ *Journal de Crelle*, t. 131, 1906, p. 268-321.

⁽²⁾ Voir POINCARÉ, *Méthodes Nouvelles*, t. II, p. 277 et suiv.

quasi-périodiques pour presque tous les systèmes de conditions initiales, mais σ_2 et μ_2 sont alors du quatrième ordre de quasi-périodicité, avec quatre fréquences fondamentales ⁽¹⁾. En effet, chacune des valeurs moyennes m , m' , donne dans l'expression correspondante

$$\cos \left(\int_{\nu_0}^{\nu} P(\nu) d\nu \right) \quad \text{ou} \quad \cos \left(\int_{\nu'_0}^{\nu} R(\nu) d\nu \right),$$

une fréquence fondamentale supplémentaire non commensurable, en général, avec les fréquences des fonctions P et R,

Passons à la troisième approximation, définie par le système

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_3}{d\nu^2} + (1 - \Psi_2) \sigma_3 &= \Lambda_2, \\ \frac{d^2 \mu_3}{d\nu^2} + (1 - \mathbf{L}_2) \mu_3 &= 0. \end{aligned}$$

En supposant σ_2 et μ_2 quasi-périodiques, ce système, si ses solutions sont bornées, donne pour σ_3 et μ_3 des expressions de même forme que σ_2 et μ_2 , mais les fonctions jouant le rôle de P, Q, R possèdent, cette fois, cinq fréquences fondamentales. Si σ_3 et μ_3 sont quasi-périodiques, le nombre de leurs fréquences est égal à six.

Et, ainsi de suite. A chaque approximation on introduit le temps en intégrant

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{1}{G_n s_n^2} \quad (n^{\text{ième}} \text{ approximation}).$$

On peut admettre que pour des conditions initiales non exceptionnelles, un nombre *fini* d'approximations conduise à des fonctions σ_n , μ_n quasi-périodiques d'ordre $2n$. Si l'on envisage, au contraire, la suite indéfinie des approximations, il n'y a aucune raison de croire que la propriété de quasi-périodicité se conservera; nous verrons effectivement, dans le prochain Chapitre, que la quasi-périodicité des solutions exactes, au lieu d'être la règle générale, est l'exception.

⁽¹⁾ Pour tout ce qui concerne les fonctions quasi-périodiques, se reporter à la Thèse de M. ESCLANGON, *Les fonctions quasi-périodiques* (Ann. Obs. Bordeaux, t. XI, 1904) et aux *Nouvelles Recherches sur les fonctions quasi-périodiques*, du même auteur (Ann. Obs. Bordeaux, t. XVI, 1917).

En supposant les conditions initiales spécialement choisies pour que les approximations successives donnent indéfiniment des solutions quasi-périodiques (nous admettons que cela est possible et que les approximations convergent), les considérations précédentes ne peuvent pas nous indiquer le nombre de fréquences de la solution rigoureuse du système (76). En effet, les valeurs σ_1, μ_1 de première approximation constituent une solution quasi-périodique à trois fréquences; en deuxième approximation, σ_2 et μ_2 possèdent en tout cinq fréquences distinctes,; en $n^{\text{ième}}$ approximation, σ_n et μ_n forment un système comportant $2n + 1$ fréquences, etc. Quand n tend vers l'infini, le nombre des fréquences fondamentales croît au delà de toute limite. Donc les solutions exactes, $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n, \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$, apparaissent comme des fonctions quasi-périodiques d'ordre infini, c'est-à-dire comme des fonctions « presque-périodiques » (¹). Mais on ne connaît aucun exemple de système dynamique à un nombre *fini* de degrés de liberté qui admette des solutions presque-périodiques irréductibles. En particulier les solutions presque-périodiques des systèmes à deux degrés de liberté se réduisent à des solutions quasi-périodiques dont le nombre de fréquences fondamentales ne peut excéder trois.

CHAPITRE V.

MOUVEMENTS RÉCURRENTS ET ORBITES ABSOLUES. LEUR REPRÉSENTATION APPROCHÉE.

37. Rôle des mouvements récurrents. — En abordant l'étude des solutions périodiques du problème des trois corps, Poincaré énonce comme « très vraisemblable » la proposition suivante, devenue célèbre à force d'être citée :

« Étant données des équations [analogues à celles du problème des trois corps dans le cas où deux d'entre eux ont des masses

(¹) Selon la terminologie de M. Harald Bohr, créateur de la théorie de ces fonctions.

très faibles], et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique, dont la période peut, il est vrai, être très longue, telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. »

Ce rôle que Poincaré attribue, sans démonstration, aux mouvements périodiques, appartient sûrement aux mouvements plus généraux dont M. Birkhoff a démontré l'existence, et auxquels il a donné le qualificatif de *récurrents* ⁽¹⁾.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement soit récurrent est celle-ci : « *étant donné un nombre positif δ , aussi petit qu'on le veut, il existe un nombre positif T assez grand pour que l'arc de trajectoire décrit par le mobile entre les instants t et $t + T$ (t quelconque) possède des points distants de moins de δ de tout point de la trajectoire* ⁽²⁾. »

Le nombre de degrés de liberté étant égal à n , le domaine des états de mouvement est une certaine région de l'espace à $2n$ dimensions, région que nous supposons limitée. Considérons alors, dans ce domaine, une trajectoire quelconque, stable au sens de Poisson, et un volume V_0 , arbitrairement petit, entourant un point quelconque P_0 de la trajectoire. L'ensemble Σ_0 des points de la trajectoire situés dans le volume V_0 admet un ensemble dérivé Σ'_0 , formé de tous les points d'accumulation, ou points-limites, de Σ_0 . L'ensemble Σ'_0 , à son tour, contient un sous-ensemble Σ dont chaque point P représente les conditions initiales d'un mouvement récurrent. Le sous-ensemble Σ existe quelque petit que soit V_0 , à moins que le domaine des états de mouvement ne renferme des régions singulières qui ne sont traversées par aucune trajectoire récurrente. Ce cas étant écarté ⁽³⁾, l'ensemble Σ est dense dans chaque volume V_0 ; sa mesure, relativement à l'ensemble de tous les points de V_0 , est considérée comme nulle.

(1) Voir le premier Mémoire de cet auteur dans le *Bull. Soc. Math. France*, vol. 40, 1912.

(2) Donc, tout mouvement quasi-périodique, ou presque-périodique, est récurrent, mais la réciproque n'est pas vraie.

(3) Il ne se présente pas, du reste, dans les systèmes dynamiques de type courant, non intégrables.

Il existe donc des conditions initiales de mouvement aussi rapprochées qu'on le veut des conditions initiales données, et donnant naissance à des mouvements récurrents.

La place des mouvements récurrents par rapport aux mouvements de type général est comparable à celle des nombres rationnels, ou à celle des nombres algébriques, dans toute la série des nombres ⁽¹⁾; ils sont donc une exception. Néanmoins leur importance est grande parce que tout mouvement de type général tend statistiquement vers un ensemble de mouvements récurrents. En outre, dans les problèmes de perturbations que l'on est amené à se poser à propos des systèmes planétaires, on peut remplacer, pendant un temps très long et sans erreur sensible, une orbite réelle issue de conditions initiales données par une orbite récurrente issue de conditions initiales très voisines. *La variation des valeurs moyennes de l'excentricité, de l'inclinaison et surtout du grand axe (théorème de Poisson) est si lente que l'orbite récurrente, ayant presque les mêmes éléments actuels que l'orbite vraie, s'en écarte extrêmement peu dans l'intervalle de temps considéré. Cette propriété, particulière à la Mécanique Céleste, s'ajoute au fait général qu'il est possible de remplacer chaque mouvement réel par un mouvement récurrent avec une erreur arbitrairement petite pendant un temps arbitrairement long.* La proposition de Poincaré se trouve donc vérifiée si l'on remplace les solutions périodiques par des solutions récurrentes, et la lenteur de la variation des éléments elliptiques doit faciliter le choix de ces dernières, en donnant une marge plus grande pour la détermination des conditions initiales. Il est clair, d'autre part, que les mouvements récurrents sont bien plus abondamment distribués, dans l'espace, que les mouvements périodiques, ceux-ci n'étant qu'un cas particulier de ceux-là.

Les mouvements *non récurrents* se divisent en mouvements de *type général* (qui passent indéfiniment au voisinage de tous leurs états) et en mouvements de *type spécial*. Les mouvements de type général possèdent, comme les mouvements récurrents, la

⁽¹⁾ Il n'est cependant pas prouvé que l'ensemble des familles de mouvements récurrents d'un système dynamique soit dénombrable; on peut concevoir qu'il ait la puissance du continu, tout en étant de mesure nulle.

stabilité à la Poisson. L'ensemble des mouvements spéciaux est regardé comme ayant une mesure relative nulle. Les mouvements asymptotiques à un mouvement récurrent sont spéciaux ; il en est de même de tout mouvement qui ne tend pas vers un ensemble de mouvements récurrents pour $t \rightarrow \pm \infty$.

38. **Définition des orbites absolues.** — Gylden s'est proposé de substituer à l'orbite vraie d'une planète une orbite plus simple affectée des inégalités séculaires et des inégalités à longues périodes de la planète. Pour ce qui est des inégalités séculaires, cela revient à remplacer les planètes troublantes par des anneaux de Gauss. Quant aux inégalités à longues périodes, lorsqu'elles existent, elles proviennent de commensurabilités approchées, avec des rapports simples, entre les moyens mouvements de la planète troublante et de la planète troublée. Les orbites absolues sont donc des courbes décrites dans les champs de gravitation envisagés au Chapitre II. Ce n'est pas tout ; Gylden ne veut étudier, parmi les trajectoires possibles, que *celles dont les coordonnées sont des fonctions quasi-périodiques de la longitude orbitale ou du temps*, et il indique dans des cas très simples ⁽¹⁾, trop simples même pour pouvoir être adaptés aux mouvements célestes, il indique certains choix réalisables des constantes d'intégration pour que les solutions des équations différentielles s'expriment par des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes. Les courbes correspondantes sont des orbites absolues.

L'état de l'analyse mathématique à la fin du dernier siècle ne pouvait malheureusement pas permettre à Gylden d'arriver à ses fins. Aujourd'hui nous sommes en mesure d'affirmer l'existence des orbites absolues, mais le problème de la représentation des coordonnées par des séries trigonométriques convergentes reste toujours à résoudre.

Dans un champ de forces appartenant à l'un des trois types du Chapitre II, nous appellerons « orbite absolue » toute trajectoire qui correspond à un mouvement récurrent. Chaque orbite

(1) GYLDÉN, *Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales* (Stockholm, 1893), 1^{re} partie, livre I, Chap. I, n° 8 et suiv.

absolue d'une planète jouit des deux propriétés fondamentales suivantes :

1° *Les éléments moyens de l'orbite vraie restent voisins, pendant très longtemps, de ceux de l'orbite absolue ;*

2° *Durant cet intervalle de temps, les positions de la planète ne s'écartent de l'orbite absolue que de petites quantités représentables par des sommes de termes périodiques (inégalités périodiques ordinaires).*

39. Domaines tridimensionnels des états de mouvement. Surfaces de section. — Nous considérons seulement, jusqu'à nouvel ordre, le système dynamique à deux degrés de liberté défini par la fonction de forces

$$F(\rho, z^2) = E(\rho, z^2) - \frac{C^2}{2\rho^2}$$

(voir n° 21), et nous avons en vue les mouvements stables au sens de Hill (n° 30), à l'exclusion de tous les autres. Le domaine des états de mouvement, qui contient les trajectoires du point (ρ, z, ρ', z') , est une région fermée de l'espace à quatre dimensions, comprise entre les hypersurfaces

$$\frac{1}{2}(\rho'^2 + z'^2) - F(\rho, z^2) = h_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\rho'^2 + z'^2) - F(\rho, z^2) = h_2,$$

h_1 et h_2 désignant les valeurs extrêmes de la constante des forces vives. Si nous nous fixons cette constante, le domaine des états de mouvement sera représenté par l'équation

$$(79) \quad \frac{1}{2}(\rho'^2 + z'^2) - F(\rho, z^2) = h \quad (h, \text{ constante comprise entre } h_1 \text{ et } h_2).$$

Mais l'hypersurface ainsi définie, sur laquelle on peut prendre des coordonnées curvilignes, est un domaine à trois dimensions, dans lequel l'étude des mouvements sera plus simple. Nous nous donnerons donc, toujours, la constante des forces vives.

Convenons maintenant de dire que le point mobile effectue un *circuit* s'il décrit un arc de trajectoire limité à deux minima consécutifs de ρ . Au commencement et à la fin du circuit, on

a : $\rho' = 0$, mais ρ' s'annule encore une fois pendant le circuit. Coupons l'hypersurface (79) par le plan $\rho' = 0$ de l'espace à quatre dimensions; nous obtenons la surface suivante

$$(80) \quad \frac{1}{2} z'^2 - F(\rho, z^2) = h,$$

dans l'espace des trois dimensions ρ, z, z' ; elle est appelée *surface de section*.

La trajectoire du point (ρ, z, ρ', z') coupe la surface de section une infinité de fois. Si P_0 est un des points d'intersection, correspondant au début d'un circuit, il y aura un autre point d'intersection pendant le circuit, puis un point d'intersection à la fin du circuit; ce point P_1 marquera le début du circuit suivant, à la fin duquel on aura le point d'intersection P_2 , etc. Associons à chaque point de la surface de section le point qui s'en déduit par un circuit; nous définissons une *transformation de la surface en elle-même*, qui peut être symbolisée par la formule

$$P_n = \mathfrak{T}(P_{n-1}) \quad \text{ou} \quad P_n = \mathfrak{T}^n(P_0).$$

L'étude qualitative des mouvements dans le plan méridien (ρ, z) est donc ramenée à l'étude de la transformation continue biunivoque de la surface (80) en elle-même par l'opération $\mathfrak{T}$ ⁽¹⁾.

Faisons un changement de variables. L'ovale $F + h = 0$ (n° 30) peut évidemment être transformé en une circonférence d'équation

$$X^2 + Y^2 = 1;$$

nous poserons

$$F + h = (1 - X^2 - Y^2) \Phi(X, Y),$$

avec $\Phi(X, Y)$ positif à l'intérieur de la circonférence. Nous écrivons ensuite

$$z' = Z \sqrt{1 - \Phi(X, Y)},$$

et l'équation (80) prendra la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Il en résulte que la surface de section (80) a la connexité d'une

(1) La transformation $\mathfrak{T}$ de la surface de section en elle-même admet, d'après sa nature, un invariant intégral à deux dimensions.

sphère. La transformation $\mathfrak{T}$ est équivalente à une transformation continue biunivoque de la surface d'une sphère en elle-même. Elle laisse donc un point invariant d'après le théorème de Brouwer ⁽¹⁾ d'où l'existence d'une solution périodique : c'est la solution périodique du plan de l'équateur, examinée au n° 22.

40. **Nature des mouvements récurrents dans les champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur.** — Le système dynamique caractérisé par la fonction de forces $F(\rho, \varpi^2)$ et la constante h (celle-ci étant choisie dans l'intervalle qui correspond à la stabilité de Hill) est un *système dynamique transitif*. Cela veut dire qu'étant donnés deux points quelconques P et Q sur la surface de section, on peut trouver dans leurs voisinages respectifs, à des distances aussi petites qu'on le veut, deux points P' et Q' tels que : $Q' = \mathfrak{T}^n(P')$, n étant un entier convenable. Pour un mouvement de type général, dans un tel système, les points où la trajectoire coupe la surface de section forment un ensemble partout dense sur cette surface (transitivité forte), ou tout au moins un ensemble dense sur la fraction de cette surface où ils sont situés. Il n'en est pas de même des mouvements spéciaux, récurrents et périodiques. *Un mouvement périodique correspond à un ensemble fini de points de la surface de section : $P_1, P_2, \dots, P_n$, tel que chacun d'eux coïncide avec son $n^{\text{ième}}$ transformé ; la période du mouvement comprend n circuits. Les mouvements récurrents non périodiques, dans un système à deux degrés de liberté, forment des familles, et chaque famille est associée à l'ensemble des points d'une courbe fermée, ou à l'ensemble des points de plusieurs courbes fermées, ou bien il n'y a qu'une seule famille, associée à l'ensemble des points de toute la surface de section, « a single minimal set of recurrent motions » ⁽²⁾. Ce dernier cas ne peut se présenter dans le problème qui nous occupe, car il exige qu'il n'y ait aucun mouvement périodique, la surface de section ayant alors la connexité*

⁽¹⁾ BROUWER, *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves* (*Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam*, vol. 11-15, 1908-1912).

⁽²⁾ La théorie complète des systèmes dynamiques à deux degrés de liberté a été élaborée par M. Birkhoff (*Acta Mathematica*, t. 43, 1922).

d'un tore. Enfin les mouvements spéciaux font partie de diverses familles, notamment les familles asymptotiques, qui sont en correspondance avec des ensembles de points remplissant chacun une partie de la surface de section.

L'existence de la solution périodique du plan de l'équateur entraîne, comme nous le verrons, l'existence d'autres solutions périodiques. La solution périodique équatoriale est de type elliptique, c'est-à-dire à exposants caractéristiques imaginaires. Les autres solutions périodiques appartiennent soit au type elliptique, soit au type hyperbolique, qui comporte des exposants caractéristiques réels. *Les mouvements périodiques et tous les autres mouvements récurrents sont instables* ⁽¹⁾ en vertu de la transitivité du système. Il en résulte l'existence d'une infinité de mouvements asymptotiques à l'un quelconque des mouvements périodiques ou récurrents lorsque t tend vers $+\infty$, et de même lorsque t tend vers $-\infty$. Parmi tous ces mouvements-là, on peut en trouver une infinité qui sont asymptotiques à l'un quelconque des mouvements périodiques, ou récurrents, pour $t \rightarrow +\infty$ et en même temps asymptotiques à n'importe quel autre de ces mouvements, ou bien au même mouvement, pour $t \rightarrow -\infty$.

Considérons un mouvement récurrent quelconque, associé à un ensemble fini de courbes gauches fermées, tracées sur la surface de section. Chacune de ces courbes est extérieure aux autres, qui sont ses images dans les transformations $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$, Désignons par n le nombre des courbes, et au lieu de transformer la surface de section par l'opération $\mathfrak{T}$, transformons-la par l'opération $\mathfrak{T}^n$. Si le point mobile se trouve à un instant quelconque sur une des courbes, il sera sur la même courbe après la transformation $\mathfrak{T}^n$. *L'allure du mouvement récurrent est donc liée à la transformation ponctuelle $\mathfrak{T}^n$ de la courbe fermée Γ en elle-même.*

Introduisons une variable angulaire λ , croissante avec le temps et subissant une augmentation de 2π après n circuits. Définissons

(¹) C'est-à-dire qu'étant donné un nombre positif η , suffisamment petit, il est impossible de trouver un autre nombre δ tel que les points distants de moins de δ de la trajectoire récurrente, à un instant quelconque, restent à une distance de cette courbe inférieure à η quand t tend vers $\pm\infty$.

d'autre part la position d'un point de la courbe Γ par une abscisse angulaire ϖ qui croît de $2k\pi$ à $2(k+1)\pi$ quand le point décrit la courbe, à partir de l'origine fixée et dans un sens déterminé. La trajectoire est définie par une certaine relation entre λ et ϖ : $\varpi = \varpi(\lambda)$, et la transformation $\mathfrak{T}^n$, effectuée sur le point (λ_0, ϖ_0) de la courbe Γ , s'exprime par une équation de la forme

$$\varpi_n = \varpi(\lambda_0 + 2\pi) = f(\varpi_0),$$

dans laquelle la fonction $f(\varpi)$ satisfait aux trois conditions de Poincaré ⁽¹⁾ : elle est continue, elle croît constamment avec ϖ , de manière que

$$f(\varpi + 2\pi) = f(\varpi) + 2\pi,$$

enfin elle est holomorphe pour toutes les valeurs réelles de ϖ .

Appliquons la transformation $\mathfrak{T}^{h_n}$ (h , entier arbitraire) à n'importe quel point de la courbe Γ ; nous avons

$$a_h \leq \varpi_{h_n} - \varpi_0 \leq b_h \quad (b_h < a_h + 2\pi).$$

Les constantes a_h et b_h ne dépendent que de h , mais, quel que soit h , il existe un nombre ν tel que

$$\frac{a_h}{h} \leq \nu \leq \frac{b_h}{h};$$

ν est la constante rotationnelle ou « rotation number » de la transformation $\mathfrak{T}^n$.

Deux cas peuvent alors se produire :

1° *La constante ν est rationnelle. La famille de mouvements définie par la courbe invariante Γ comprend un ou plusieurs mouvements périodiques, et tous les autres mouvements de la famille s'approchent asymptotiquement des mouvements périodiques pour $t \rightarrow \pm \infty$.*

2° *La constante ν est irrationnelle. Étant donné, d'autre part, que la fonction $f(\varpi)$ est holomorphe, la famille de mouvements associée à la courbe invariante Γ consiste en un ensemble de mouvements récurrents de type continu, c'est-à-dire de mou-*

⁽¹⁾ POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (*Journal de Liouville*, 4^e série, t. 1, 1885), Chap. XV.

vements récurrents dont les trajectoires, sans exception, passent indéfiniment dans un voisinage arbitrairement petit de tout point de la courbe Γ ⁽¹⁾.

Représentons sur un tore les mouvements récurrents définis par le « rotation number » ν , supposé irrationnel. La section méridienne génératrice du tore s'obtient par déformation de la courbe Γ . La variable λ , déjà introduite, est l'angle que fait le plan méridien à l'instant t avec le plan méridien origine, tandis que ϖ est l'angle de la normale au point mobile avec le plan équatorial du tore. L'équation en λ et ϖ de la trajectoire, si on la met sous forme différentielle, est réductible à

$$(81) \quad \frac{d\varpi}{d\lambda} = I(\lambda, \varpi),$$

la fonction $I(\lambda, \varpi)$ étant holomorphe et périodique en λ et ϖ , de période 2π . Tout autre mouvement de la même famille s'obtient en faisant varier la constante arbitraire dans l'intégrale générale de (81). La trajectoire figurée sur le tore est une « caractéristique » de Poincaré, dont l'équation, en termes finis, s'écrit

$$(82) \quad \varpi = \nu\lambda + H(\lambda, \varpi) + \text{const.}$$

Dans le second membre, $H(\lambda, \varpi)$ est une série trigonométrique double représentant une fonction continue périodique en λ et ϖ , de période 2π .

On déduit de là que les coordonnées ρ, z, ρ', z' du point mobile dans le domaine des états de mouvement s'expriment par des fonctions quasi-périodiques de λ ayant comme fréquences fondamentales 1 et ν . Le temps, qui est lié à λ par une relation de la forme

$$\frac{dt}{d\lambda} = \text{fonction de } \lambda \text{ et } \varpi, \text{ de période } 2\pi,$$

s'exprime par l'intégrale d'une fonction quasi-périodique. On a

⁽¹⁾ Voir à ce sujet une Note de M. DENJOY (*Comptes rendus*, t. 194, 1932, p. 830).

donc en général, mais pas toujours ⁽¹⁾,

$t = g\lambda + \text{fonction quasi-périodique de } \lambda \quad \left(g, \text{ valeur moyenne de } \frac{dt}{d\lambda} \right).$

En résumé : *les mouvements récurrents dans les champs de forces du type $F(\rho, z^2)$ sont tels que les coordonnées et les vitesses s'expriment par des fonctions quasi-périodiques, à deux fréquences fondamentales, d'une variable angulaire λ , convenablement choisie; mais ces coordonnées et ces vitesses, fonctions quasi-périodiques de λ , ne sont pas forcément des fonctions quasi-périodiques du temps.*

On ne connaît aucun procédé d'intégration de l'équation différentielle (81); la détermination des coefficients de (82), c'est-à-dire, en particulier, de la constante rotationnelle ν , ne pourra donc pas se faire d'une manière rigoureuse.

41. Transformation des équations différentielles du mouvement par la méthode de M. Kryloff. — Prenons maintenant comme équations du mouvement, non pas le système en ρ, z , mais le système (76) en σ, μ , avec ν comme variable indépendante, liée à t par l'équation

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{1}{Gs^2}.$$

Nous mettrons en évidence l'ordre de grandeur des fonctions L , Λ et Ψ en posant

$$L = \varepsilon L', \quad \Lambda = \varepsilon \Lambda', \quad \Psi = \varepsilon \Psi'.$$

Introduisons, d'autre part, deux constantes arbitraires β et γ , grâce auxquelles le système (76) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mu}{d\nu^2} + (1 + \varepsilon \beta) \mu &= \varepsilon (L' + \beta) \mu, \\ \frac{d^2 \sigma}{d\nu^2} + (1 - \varepsilon \gamma) \sigma &= \varepsilon \Lambda' + \varepsilon (\Psi' - \gamma) \sigma. \end{aligned}$$

(1) L'intégrale d'une fonction quasi-périodique n'est elle-même quasi-périodique que si elle est bornée. Rien ne permet d'affirmer que l'intégrale de la fonction $\frac{dt}{d\lambda} - g$, qui intervient ici, est toujours bornée.

Nous avons vu au cours du n° 36 que les fonctions L et Ψ sont exprimables au moyen des trois quantités inconnues σ , μ , $\frac{d\mu}{dv}$, tandis que l'expression de Λ contient, en plus, $\frac{d\sigma}{dv}$ ⁽¹⁾. Nous écrirons

$$(83) \quad \begin{cases} \frac{d^2\mu}{dv^2} + (1 + \varepsilon\beta)\mu = \varepsilon P \left(\sigma, \mu, \frac{d\mu}{dv}, \beta \right), \\ \frac{d^2\sigma}{dv^2} + (1 - \varepsilon\gamma)\sigma = \varepsilon Q \left(\sigma, \mu, \frac{d\sigma}{dv}, \frac{d\mu}{dv}, \gamma \right). \end{cases}$$

la signification de P et Q étant donnée par la comparaison avec le système précédent.

C'est à propos d'équations différentielles ayant les formes (83) que M. Kryloff a élaboré récemment les « méthodes de la Mécanique non linéaire » ⁽²⁾. A la manière de cet auteur, faisons le changement de variables ci-après

$$(84) \quad \begin{cases} \mu = p \sin \zeta, & \frac{d\mu}{dv} = p \sqrt{1 + \varepsilon\beta} \cos \zeta, \\ \sigma = q \cos \lambda, & \frac{d\sigma}{dv} = -q \sqrt{1 - \varepsilon\gamma} \sin \lambda. \end{cases}$$

Le système (83) se transforme en

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dv} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}} P(q \cos \lambda, p \sin \zeta, p \sqrt{1 + \varepsilon\beta} \cos \zeta, \beta) \cos \zeta, \\ \frac{d\zeta}{dv} = \sqrt{1 + \varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{p \sqrt{1 + \varepsilon\beta}} P(q \cos \lambda, p \sin \zeta, p \sqrt{1 + \varepsilon\beta} \cos \zeta, \beta) \sin \zeta, \\ \frac{dq}{dv} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} Q(q \cos \lambda, p \sin \zeta, -q \sqrt{1 - \varepsilon\gamma} \sin \lambda, p \sqrt{1 + \varepsilon\beta} \cos \zeta, \gamma) \sin \lambda, \\ \frac{d\lambda}{dv} = -\sqrt{1 - \varepsilon\gamma} - \frac{\varepsilon}{q \sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} Q(q \cos \lambda, p \sin \zeta, -q \sqrt{1 - \varepsilon\gamma} \sin \lambda, p \sqrt{1 + \varepsilon\beta} \cos \zeta, \gamma) \cos \lambda. \end{cases}$$

(1) La dérivée seconde $\frac{d^2\mu}{dv^2}$ intervient aussi dans Λ , mais elle s'exprime en fonction de σ , μ , $\frac{d\mu}{dv}$ à cause de la deuxième équation (76).

(2) Voir notamment : N. KRYLOFF et N. BOGOLIUBOFF, *Les Méthodes de la Mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires* (Public. Acad. Sc. Ukraine, Kieff, 1934).

Les fonctions P et Q étant analytiques, on a pour $P \cos \zeta$, $P \sin \zeta$,
— $Q \sin \lambda$, $Q \cos \lambda$, les expressions suivantes, en séries doubles de
Fourier

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \cos \zeta = A^{(p)}(p, q) + \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m H_{n,m}^{(p)}(p, q) e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}, \\ P \sin \zeta = B^{(p)}(p, q) + \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m L_{n,m}^{(p)}(p, q) e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}, \\ - Q \sin \lambda = A^{(q)}(p, q) + \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m H_{n,m}^{(q)}(p, q) e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}, \\ Q \cos \lambda = B^{(q)}(p, q) + \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m L_{n,m}^{(q)}(p, q) e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}. \end{array} \right.$$

A l'aide des coefficients H et L, formons les fonctions ci-après :

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} X^{(p)}(p, q, \zeta, \lambda) = \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m H_{n,m}^{(p)} \frac{e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}}{(n\sqrt{1 + \varepsilon\beta} + m\sqrt{1 - \varepsilon\gamma})\sqrt{-1}}, \\ Y^{(p)}(p, q, \zeta, \lambda) = \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m L_{n,m}^{(p)} \frac{e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}}{(n\sqrt{1 + \varepsilon\beta} + m\sqrt{1 - \varepsilon\gamma})\sqrt{-1}}, \\ X^{(q)}(p, q, \zeta, \lambda) = \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m H_{n,m}^{(q)} \frac{e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}}{(n\sqrt{1 + \varepsilon\beta} + m\sqrt{1 - \varepsilon\gamma})\sqrt{-1}}, \\ Y^{(q)}(p, q, \zeta, \lambda) = \sum_{\substack{n \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_m L_{n,m}^{(q)} \frac{e^{(n\zeta + m\lambda)\sqrt{-1}}}{(n\sqrt{1 + \varepsilon\beta} + m\sqrt{1 - \varepsilon\gamma})\sqrt{-1}}. \end{array} \right.$$

Les fonctions (87) ne sont définies que si les séries convergent.

Nous devons donc supposer que le rapport $\frac{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}}$ n'est pas un
nombre rationnel, ce qui revient à écarter des systèmes de valeurs
de β et γ formant un ensemble de mesure nulle. Deux cas peuvent
alors se produire :

1° Le rapport $\frac{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}}$ est un nombre algébrique, ou un nombre

transcendant satisfaisant à l'inégalité de Liouville ⁽¹⁾

$$\left| \frac{\sqrt{1+\varepsilon\beta}}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}} - \frac{k}{n} \right| > \frac{C}{n^\alpha}.$$

$\left(\frac{k}{n}, \text{ valeur rationnelle approchée de } \frac{\sqrt{1+\varepsilon\beta}}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}}; C, \text{ constante, } \alpha, \text{ nombre entier, constant, supérieur à } 1 \right)$. Les séries (87) sont absolument et uniformément convergentes.

2° Le rapport $\frac{\sqrt{1+\varepsilon\beta}}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}}$ est un nombre transcendant ne vérifiant pas l'inégalité de Liouville. *Les séries (87) divergent pour une infinité de systèmes de valeurs de β et γ formant un ensemble de mesure nulle; pour tous les autres systèmes de valeurs, il y a convergence.*

Nous avons ainsi éliminé deux ensembles de points (β, γ) dont la mesure totale est nulle. Les fonctions introduites par les formules (87) existent donc pour presque toutes les positions du point (β, γ) dans un certain domaine plan.

En dérivant les équations (87) et en tenant compte de (86), nous obtenons les égalités

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+\varepsilon\beta} \frac{\partial X^{(p)}}{\partial \zeta} + \sqrt{1-\varepsilon\gamma} \frac{\partial X^{(p)}}{\partial \lambda} = P \cos \zeta - A^{(p)}, \\ \sqrt{1+\varepsilon\beta} \frac{\partial Y^{(p)}}{\partial \zeta} + \sqrt{1-\varepsilon\gamma} \frac{\partial Y^{(p)}}{\partial \lambda} = P \sin \zeta - B^{(p)}, \\ \sqrt{1+\varepsilon\beta} \frac{\partial X^{(q)}}{\partial \zeta} + \sqrt{1-\varepsilon\gamma} \frac{\partial X^{(q)}}{\partial \lambda} = -Q \sin \lambda - A^{(q)}, \\ \sqrt{1+\varepsilon\beta} \frac{\partial Y^{(q)}}{\partial \zeta} + \sqrt{1-\varepsilon\gamma} \frac{\partial Y^{(q)}}{\partial \lambda} = Q \cos \lambda - B^{(q)}. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ *Journal de Liouville*, t. XVI, 1851, p. 136-139.

Effectuons le changement de variables définitif

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = p_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}} X_1^{(p)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \zeta = \zeta_1 - \frac{\varepsilon}{p_1 \sqrt{1 + \varepsilon\beta}} Y_1^{(p)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ q = q_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} X_1^{(q)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \lambda = \lambda_1 - \frac{\varepsilon}{q_1 \sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} Y_1^{(q)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \end{array} \right.$$

les notations $X_1(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1)$, $Y_1(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1)$ désignant ce que deviennent les fonctions $X(p, q, \zeta, \lambda)$, $Y(p, q, \zeta, \lambda)$ lorsqu'on remplace p, q, ζ, λ par $p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1$.

Les équations (85) se transforment en d'autres qu'il est inutile d'écrire et qui, regardées comme un système algébrique linéaire en $\frac{dp_1}{dv}$, $\frac{d\zeta_1}{dv}$, $\frac{dq_1}{dv}$, $\frac{d\lambda_1}{dv}$, donnent, par résolution

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dv} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}} A_1^{(p)}(p_1, q_1) + \text{termes en } \varepsilon^2, \\ \frac{d\zeta_1}{dv} = \sqrt{1 + \varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{p_1 \sqrt{1 + \varepsilon\beta}} B_1^{(p)}(p_1, q_1) + \text{termes en } \varepsilon^2, \\ \frac{dq_1}{dv} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} A_1^{(q)}(p_1, q_1) + \text{termes en } \varepsilon^2, \\ \frac{d\lambda_1}{dv} = \sqrt{1 - \varepsilon\gamma} - \frac{\varepsilon}{q_1 \sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} B_1^{(q)}(p_1, q_1) + \text{termes en } \varepsilon^2; \end{array} \right.$$

$A_1(p_1, q_1)$ et $B_1(p_1, q_1)$ se déduisent de $A(p, q)$ et $B(p, q)$ en faisant $p = p_1, q = q_1$. Le système (90) est le système différentiel de première approximation: il permet d'obtenir des solutions simples lorsqu'on néglige ε^2 .

Pour tenir compte de ε^2 , on formera un système du même genre en traitant les termes en ε^2 des équations (90) de la même manière qu'on a traité les termes en ε des équations (85).

Désignons respectivement par $\varepsilon^2 R_1^{(p)}$, $\varepsilon^2 S_1^{(p)}$, $\varepsilon^2 R_1^{(q)}$, $\varepsilon^2 S_1^{(q)}$ les groupements des termes en ε^2 dans les quatre équations (90). Les fonctions $R_1^{(p)}$, $S_1^{(p)}$, $R_1^{(q)}$, $S_1^{(q)}$ dépendent de $p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1$ et possèdent, ainsi que toutes leurs dérivées successives, la période 2π par

rapport aux variables ζ_1 et λ_1 . Soient leurs séries de Fourier

$$R_1^{(p)} = A_2^{(p)}(p_1, q_1) + \sum_n \sum_{\substack{m \\ n^2 + m^2 \neq 0}} M_{n,m}^{(p)}(p_1, q_1) e^{(n\zeta_1 + m\lambda_1)\sqrt{-1}},$$

$$S_1^{(p)} = B_2^{(p)}(p_1, q_1) + \sum_n \sum_{\substack{m \\ n^2 + m^2 \neq 0}} N_{n,m}^{(p)}(p_1, q_1) e^{(n\zeta_1 + m\lambda_1)\sqrt{-1}},$$

$$R_1^{(q)} = \dots\dots\dots,$$

$$S_1^{(q)} = \dots\dots\dots,$$

et soient les fonctions

$$X_2^{(p)} = \sum_n \sum_{\substack{m \\ n^2 + m^2 \neq 0}} M_{n,m}^{(p)} \frac{e^{(n\zeta_1 + m\lambda_1)\sqrt{-1}}}{(n\sqrt{1 + \varepsilon_1^2} + m\sqrt{1 - \varepsilon_1^2})\sqrt{-1}},$$

$$Y_2^{(p)} = \sum_n \sum_{\substack{m \\ n^2 + m^2 \neq 0}} N_{n,m}^{(p)} \frac{e^{(n\zeta_1 + m\lambda_1)\sqrt{-1}}}{(n\sqrt{1 + \varepsilon_1^2} + m\sqrt{1 - \varepsilon_1^2})\sqrt{-1}},$$

$$X_2^{(q)} = \dots\dots\dots,$$

$$Y_2^{(q)} = \dots\dots\dots$$

Le changement de variables

$$p_1 = p_2 + \varepsilon X_2^{(p)}(p_2, q_2, \zeta_2, \lambda_2),$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 + \varepsilon Y_2^{(p)}(p_2, q_2, \zeta_2, \lambda_2),$$

$$q_1 = \dots\dots\dots,$$

$$\lambda_1 = \dots\dots\dots$$

transforme le système (90) en

$$\frac{dp_2}{dv} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2}} A_1^{(p)}(p_2, q_2) + \varepsilon^2 A_2^{(p)}(p_2, q_2) + \text{termes en } \varepsilon^3,$$

$$\frac{d\zeta_2}{dv} = \sqrt{1 + \varepsilon_1^2} - \frac{\varepsilon}{p_2 \sqrt{1 + \varepsilon_1^2}} B_1^{(p)}(p_2, q_2) + \varepsilon^2 B_2^{(p)}(p_2, q_2) + \text{termes en } \varepsilon^3,$$

$$\frac{dq_2}{dv} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{d\lambda_2}{dv} = \dots\dots\dots$$

qui est le système différentiel de deuxième approximation. On peut continuer l'itération indéfiniment; en $n^{i\text{ème}}$ approximation, on

aura le système

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_n}{dv} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon\beta}} \Lambda_1^{(p)}(p_n, q_n) + \varepsilon^2 \Lambda_2^{(p)}(p_n, q_n) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^n \Lambda_n^{(p)}(p_n, q_n) + \text{termes en } \varepsilon^{n+1}, \\ \frac{d\zeta_n}{dv} &= \sqrt{1+\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{p_n \sqrt{1+\varepsilon\beta}} B_1^{(p)}(p_n, q_n) + \varepsilon^2 B_2^{(p)}(p_n, q_n) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^n B_n^{(p)}(p_n, q_n) + \text{termes en } \varepsilon^{n+1}, \\ \frac{dq_n}{dv} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}} \Lambda_1^{(q)}(p_n, q_n) + \varepsilon^2 \Lambda_2^{(q)}(p_n, q_n) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^n \Lambda_n^{(q)}(p_n, q_n) + \text{termes en } \varepsilon^{n+1}, \\ \frac{d\lambda_n}{dv} &= \sqrt{1-\varepsilon\gamma} - \frac{\varepsilon}{q_n \sqrt{1-\varepsilon\gamma}} B_1^{(q)}(p_n, q_n) + \varepsilon^2 B_2^{(q)}(p_n, q_n) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^n B_n^{(q)}(p_n, q_n) + \text{termes en } \varepsilon^{n+1}, \end{aligned} \right.$$

qu'on utilisera en négligeant ε^{n+1} .

42. Solution stationnaire des équations approchées. — Considérons la première et la troisième équation du système (90)

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_1}{dv} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon\beta}} \Lambda_1^{(p)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 R_1^{(p)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \frac{dq_1}{dv} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}} \Lambda_1^{(q)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 R_1^{(q)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1). \end{aligned} \right.$$

Si l'on néglige ε^2 , et si β et γ ont des valeurs convenables, il existe une solution particulière de ces équations telle que

$$(93) \quad \Lambda_1^{(p)}(p_1, q_1) = \Lambda_1^{(q)}(p_1, q_1) = 0.$$

En effet, les fonctions p_1 et q_1 ne peuvent pas être monotones; car si p_1 , par exemple, était monotone pour $t > t_0$, elle croîtrait au delà de toute limite, ce qui est impossible à cause de la stabilité de Hill, ou bien elle tendrait vers une limite et sa dérivée tendrait vers zéro; il faudrait alors que q_1 tende vers une limite annulant $\Lambda_1^{(p)}(p_1, q_1)$ et que R_1 tende vers zéro; mais cela est impossible car R_1 est périodique (de période 2π) en ζ_1 et λ_1 . Donc p_1, q_1 et leurs dérivées sont des fonctions oscillantes. Les parties principales de $\frac{dp_1}{dv}$ et $\frac{dq_1}{dv}$ étant $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon\beta}} \Lambda_1^{(p)}(p_1, q_1)$ et $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}} \Lambda_1^{(q)}(p_1, q_1)$, on

a, au voisinage des points stationnaires de p_1 et q_1 , respectivement $A_1^{(p)}(p_1, q_1) = 0$ et $A_1^{(q)}(p_1, q_1) = 0$. Or, les oscillations de p_1 et q_1 sont faibles, de l'ordre de ε , de sorte que les courbes $A_1^{(p)}(p_1, q_1) = 0$, $A_1^{(q)}(p_1, q_1) = 0$, du plan (p_1, q_1) , passent l'une près de l'autre dans une région dont les dimensions sont de l'ordre de ε ; elles se coupent donc, en général, en un point. Soient h_1, k_1 les coordonnées de ce point, solution du système (93); h_1 et k_1 dépendent des constantes arbitraires β, γ ; si, exceptionnellement les courbes $A_1^{(p)}(p_1, q_1) = 0$, $A_1^{(q)}(p_1, q_1) = 0$ ne se coupaient pas dans la région où elles sont voisines, une variation convenable de β et γ les amènerait à avoir un point commun (h_1, k_1) .

Les équations (90) de première approximation admettent, dans ces conditions, la solution particulière suivante :

$$\begin{aligned} p_1 &= h_1, & q_1 &= k_1, \\ z_1 &= H_1 v + F_1, & \lambda_1 &= K_1 v + G_1, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{1 + \varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{h_1 \sqrt{1 + \varepsilon\beta}} B_1^{(p)}(h_1, k_1), \\ K_1 &= \sqrt{1 - \varepsilon\gamma} - \frac{\varepsilon}{k_1 \sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} B_1^{(q)}(h_1, k_1), \end{aligned}$$

et en désignant par F_1 et G_1 des constantes arbitraires. On en déduit, grâce à (89) et (84),

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= h_1 \sin(H_1 v + F_1) \\ &+ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}} [X_1^{(p)} \sin(H_1 v + F_1) + Y_1^{(p)} \cos(H_1 v + F_1)], \\ \frac{d\mu}{dv} &= \sqrt{1 + \varepsilon\beta} h_1 \cos(H_1 v + F_1) \\ &+ \varepsilon [X_1^{(p)} \cos(H_1 v + F_1) - Y_1^{(p)} \sin(H_1 v + F_1)], \\ \sigma &= k_1 \cos(K_1 v + G_1) \\ &+ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} [X_1^{(q)} \cos(K_1 v + G_1) - Y_1^{(q)} \sin(K_1 v + G_1)], \\ \frac{d\sigma}{dv} &= -\sqrt{1 - \varepsilon\gamma} k_1 \sin(K_1 v + G_1) \\ &+ \varepsilon [-X_1^{(q)} \sin(K_1 v + G_1) - Y_1^{(q)} \cos(K_1 v + G_1)]. \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, les $X_1^{(p)}, Y_1^{(p)}, X_1^{(q)}, Y_1^{(q)}$ sont des fonctions de $h_1, k_1, H_1 v + F_1, K_1 v + G_1$, admettant la période 2π par

rapport à $H_1 v + F_1$ et $K_1 v + G_1$. On voit que la solution stationnaire des équations de première approximation est quasi-périodique relativement à v avec les deux fréquences fondamentales H_1 et K_1 .

Toutes les approximations, quel que soit n , donnent, de la même manière, une solution quasi-périodique avec deux fréquences fondamentales. Mais ce procédé de calcul formel n'indique nullement le caractère de la solution exacte ainsi représentée. Si l'on poursuit indéfiniment les approximations, on obtient le développement des inconnues sous forme quasi-périodique, avec des séries dont les coefficients contiennent les puissances successives de ε ; ces séries sont presque toujours divergentes.

43. Variation des constantes β et γ . Solutions stationnaires exactes. — La solution générale du système (91) ($n^{\text{ième}}$ approximation) dépend de quatre constantes arbitraires. Au lieu de viser à une intégration rigoureuse, faisons varier les constantes β et γ que nous avons laissées à notre disposition. Chaque système de valeurs de β et γ donne une solution stationnaire approchée dépendant de deux constantes arbitraires: nous aurons donc, en faisant varier β et γ , une famille de solutions dépendant de quatre constantes arbitraires. Toutes les solutions exactes seront représentées, d'une manière approchée, par des solutions quasi-périodiques à deux fréquences fondamentales.

Comment choisir le domaine de variation de β et γ ? C'est la forme des équations différentielles (83) qui nous l'indique. Si nous voulons éviter que l'introduction de β et γ soit purement artificielle, nous devons, à cause du caractère oscillatoire de μ et σ de part et d'autre de la valeur zéro, supposer que le mouvement quasi-périodique défini par

$$\frac{d^2 \mu}{dv^2} + (1 + \varepsilon \beta) \mu = 0,$$

$$\frac{d^2 \sigma}{dv^2} + (1 - \varepsilon \gamma) \sigma = 0,$$

est troublé par une force d'intensité moyenne nulle, dont les composantes sur l'axe des μ et sur l'axe des σ sont εP et εQ . Le

choix de β et γ en résulte : pour que les fonctions P et Q puissent être considérées comme ayant une valeur moyenne nulle, les fonctions L et Ψ doivent avoir comme valeurs moyennes respectives $-\varepsilon\beta$ et $\varepsilon\gamma$ ⁽¹⁾. Il existe toujours, d'une manière approchée, des valeurs moyennes de L et Ψ ; la valeur moyenne de L est négative (n° 20) et celle de Ψ est positive dans le cas des perturbations planétaires (nos 27 et 28). Si la constante des forces vives est donnée, β et γ , liés l'un à l'autre, sont en rapport avec l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite osculatrice ⁽²⁾, qui sont elles-mêmes limitées par la stabilité de Hill. La constante des forces vives doit varier, elle aussi, dans un intervalle convenable. Bref, *les nombres β et γ doivent être choisis dans un domaine qui correspond à la stabilité de Hill* ⁽³⁾.

Parmi tous les points (β, γ) de ce domaine, il en est une infinité, formant un ensemble de mesure nulle, tel que la solution stationnaire approchée attachée à l'un quelconque de ses points corresponde à une solution stationnaire exacte. Cette proposition ne fait que traduire dans le plan (β, γ) le théorème de M. Birkhoff (n° 40) sur l'existence d'une infinité de courbes invariantes dans une certaine transformation ponctuelle de la surface de section, chaque courbe donnant une famille de mouvements récurrents et l'ensemble de tous les mouvements récurrents ayant une mesure nulle ⁽⁴⁾.

Nous n'avons malheureusement aucun critère pour mettre en évidence les valeurs de β et γ des solutions stationnaires exactes. Nous savons seulement qu'*étant donné un point (β, γ) dans le domaine approprié, il existe des points de ce domaine aussi*

⁽¹⁾ β et γ fixent, en quelque sorte, les *éléments moyens* de la trajectoire du point (μ, σ) .

⁽²⁾ L'excentricité et l'inclinaison sont aussi liées l'une à l'autre quand h est donné.

⁽³⁾ Le fait que β et γ ont des valeurs convenables se manifeste par l'existence d'une solution réelle du système (g3), mais cela ne suffit pas : il faut encore s'assurer, par les éléments de première approximation, que la trajectoire est stable au sens de Hill.

⁽⁴⁾ L'affirmation de la mesure nulle repose sur l'hypothèse de la *transitivité forte* (hypothèse quasi-ergodique); néanmoins, en s'affranchissant de cette hypothèse, on admet toujours une mesure nulle pour l'ensemble des mouvements récurrents.

voisins qu'on le veut du point (β, γ) et auxquels sont attachés des solutions stationnaires exactes (cf. n° 37).

44. Représentation asymptotique des mouvements récurrents.

— Retournons au système des équations du mouvement, écrit avec les variables $p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1$ de la première approximation [voir (90)]

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dv} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon\beta}} A_1^{(p)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 R_1^{(p)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \frac{dq_1}{dv} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}} A_1^{(q)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 R_1^{(q)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \frac{d\zeta_1}{dv} &= \sqrt{1+\varepsilon\beta} - \frac{\varepsilon}{p_1 \sqrt{1+\varepsilon\beta}} B_1^{(p)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 S_1^{(p)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \frac{d\lambda_1}{dv} &= \sqrt{1-\varepsilon\gamma} - \frac{\varepsilon}{q_1 \sqrt{1-\varepsilon\gamma}} B_1^{(q)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 S_1^{(q)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1).\end{aligned}$$

Prenons comme variable indépendante λ_1 ; les quatre équations ci-dessus se réduisent à trois, en éliminant v

$$(95) \quad \begin{cases} \frac{dp_1}{d\lambda_1} = \varepsilon A_{\lambda_1}^{(p)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 R_{\lambda_1}^{(p)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \frac{dq_1}{d\lambda_1} = \varepsilon A_{\lambda_1}^{(q)}(p_1, q_1) + \varepsilon^2 R_{\lambda_1}^{(q)}(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \\ \frac{d\zeta_1}{d\lambda_1} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon\beta}}{\sqrt{1-\varepsilon\gamma}} + \varepsilon B_1(p_1, q_1) + \varepsilon^2 S_1(p_1, q_1, \zeta_1, \lambda_1), \end{cases}$$

les fonctions $A_{\lambda_1}^{(p)}, A_{\lambda_1}^{(q)}, B_1$ étant analytiques dans le domaine de variation de p_1, q_1 , et les fonctions $R_{\lambda_1}^{(p)}, R_{\lambda_1}^{(q)}, S_1$ possédant, ainsi que leurs dérivées successives, la période 2π par rapport à λ_1 et ζ_1 .

Désignons par δ_1 la valeur de la fonction $B_1(p_1, q_1)$ lorsqu'on remplace p_1, q_1 par les valeurs h_1, k_1 tirées de la résolution du système (93). La fonction B_1 étant analytique, on a le développement suivant, en série convergente, autour du point (h_1, k_1)

$$B_1(p_1, q_1) = \delta_1 + \sum_{\substack{n \\ n^2+m^2 \neq 0}} \sum_{\substack{m \\ m \geq 0}} I_{n,m} (p_1 - h_1)^n (q_1 - k_1)^m.$$

Considérons, d'autre part, la série

$$D_1(p_1, q_1) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n^2 + m^2 \neq 0}} \sum_{m \geq 0} \frac{I_{n,m}}{\frac{n}{p_1 - h_1} \Lambda_{\lambda_1}^{(p)} + \frac{m}{q_1 - k_1} \Lambda_{\lambda_1}^{(q)}} (p_1 - h_1)^n (q_1 - k_1)^m;$$

elle converge, comme la précédente, autour du point (h_1, k_1) , et l'on a

$$(96) \quad \Lambda_{\lambda_1}^{(p)} \frac{\partial D_1}{\partial p_1} + \Lambda_{\lambda_1}^{(q)} \frac{\partial D_1}{\partial q_1} = B_1 - \delta_1.$$

Au lieu de ζ_1 , prenons comme variable ϖ_1 telle que

$$(97) \quad \zeta_1 = \varpi_1 + D_1(p_1, q_1).$$

En nous basant sur les équations (95), nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{d\varpi_1}{d\lambda_1} &= \frac{d\zeta_1}{d\lambda_1} - \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \frac{dp_1}{d\lambda_1} - \frac{\partial D_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{d\lambda_1} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \zeta_1^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \gamma_1^2}} + \varepsilon_1 B_1 - \varepsilon_1 \left(\Lambda_{\lambda_1}^{(p)} \frac{\partial D_1}{\partial p_1} + \Lambda_{\lambda_1}^{(q)} \frac{\partial D_1}{\partial q_1} \right) \\ &\quad + \varepsilon_1^2 S_1 - \varepsilon_1^2 \left(R_{\lambda_1}^{(p)} \frac{\partial D_1}{\partial p_1} + R_{\lambda_1}^{(q)} \frac{\partial D_1}{\partial q_1} \right), \end{aligned}$$

qui, en tenant compte de (96), donne l'équation

$$(98) \quad \frac{d\varpi_1}{d\lambda_1} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \zeta_1^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \gamma_1^2}} + \varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_1^2 R_1(p_1, q_1, \varpi_1, \lambda_1),$$

dans laquelle R_1 est une fonction indéfiniment dérivable, et possède la période 2π par rapport aux variables ϖ_1 et λ_1 .

Les équations (90) sont, en définitive, remplacées par les deux premières équations (95), plus l'équation (98), plus une autre équation pour introduire v , par exemple

$$(99) \quad \frac{dv}{d\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \gamma_1^2}} + \varepsilon_1 V_1(p_1, q_1, \varpi_1, \lambda_1),$$

qui se déduit de la quatrième équation (90). La fonction V_1 possède les mêmes propriétés que les fonctions R quant à la dérivabilité et à la périodicité.

Pour étudier la nature des trajectoires, l'équation (99) n'est pas nécessaire. Si nous nous donnons la constante des forces vives,

une autre équation devient inutile. Enfin, si nous avons en vue une famille de mouvements récurrents, nous pouvons prendre comme surfaces de section (n° 39) les plans $\lambda_1 = \text{const.}$: quand la surface de section varie, la courbe invariante de la famille engendre un anneau en forme de tore, sur lequel l'équation (98) suffit à définir les trajectoires.

Dans chaque surface de section, la courbe invariante est définie par des équations de la forme

$$\lambda_1 = c, \quad p_1 = p_1(\varpi, c), \quad q_1 = q_1(\varpi, c).$$

L'équation (98) doit donc s'écrire

$$(100) \quad \frac{d\varpi_1}{d\lambda_1} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2 L_1(\varpi_1, \lambda_1),$$

L_1 désignant une fonction indéfiniment dérivable et périodique en ϖ_1 et λ_1 , de période 2π .

Cette équation (100) est un cas particulier de l'équation (81) de Poincaré-Denjoy, qui définit les caractéristiques à la surface du tore. Nous obtenons immédiatement, d'après (100), une valeur approchée de la constante rotationnelle (*rotation number*) de la famille de mouvements récurrents considérée. En effet, ν désignant cette constante, et M_1 le maximum du module de la fonction L_1 , nous avons

$$\left| \nu - \left(\frac{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} + \varepsilon\delta_1 \right) \right| \leq M_1 \varepsilon^2.$$

A l'aide des équations différentielles de $n^{\text{ème}}$ approximation, nous obtiendrions pour le *rotation number* un développement de la forme

$$(101) \quad \nu = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \dots + \varepsilon^n\delta_n + \dots,$$

possédant la propriété asymptotique

$$(102) \quad \left| \nu - \left(\frac{\sqrt{1 + \varepsilon\beta}}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \dots + \varepsilon^n\delta_n \right) \right| < M_n \varepsilon^{n+1}.$$

L'intégrale générale de l'équation (100) s'écrit comme celle

de (81)

$$(103) \quad \varpi_1 = \nu \lambda_1 + H_1(\lambda_1, \varpi_1) + \text{const.},$$

$H_1(\lambda_1, \varpi_1)$ étant une fonction continue et périodique en λ_1 et ϖ_1 , de période 2π .

Il est facile de passer des variables $p_1, q_1, \varpi_1, \lambda_1$ aux coordonnées initiales μ, σ . *Pour la famille de mouvements récurrents caractérisée par le « rotation number » ν , μ et σ sont des fonctions quasi-périodiques de la variable λ_1 , avec les deux fréquences fondamentales 1 et ν .*

$$\mu = \mu(\lambda_1, \nu \lambda_1), \quad \sigma = \sigma(\lambda_1, \nu \lambda_1).$$

La représentation des fonctions $\mu(\lambda_1)$, $\sigma(\lambda_1)$ se fera au moyen des équations de $n^{\text{ième}}$ approximation; elle comportera des développements suivant les puissances de ε jusqu'à ε^n , et l'on aura pour chacun de ces développements une propriété asymptotique, de même nature que la propriété (102) quoique moins simple

$$\begin{aligned} \mu(\varpi_1, \lambda_1) - \mu_0(\varpi_1, \lambda_1) - \varepsilon \mu_1(\varpi_1, \lambda_1) - \dots - \varepsilon^n \mu_n(\varpi_1, \lambda_1) &< \mathfrak{M}(\nu, \varepsilon), \\ \sigma(\varpi_1, \lambda_1) - \sigma_0(\varpi_1, \lambda_1) - \varepsilon \sigma_1(\varpi_1, \lambda_1) - \dots - \varepsilon^n \sigma_n(\varpi_1, \lambda_1) &< \mathfrak{S}(\nu, \varepsilon); \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{S}$ sont des quantités qui dépendent de ν et de ε , mais leur ordre de petitesse par rapport à ε , qui est au moins égal à 1, n'augmente pas avec n .

Si l'on fait croître n indéfiniment, les séries

$$\begin{aligned} \nu &= \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots + \varepsilon^n \delta_n + \dots, \\ \mu &= \mu_0(\varpi_1, \lambda_1) + \varepsilon \mu_1(\varpi_1, \lambda_1) + \dots + \varepsilon^n \mu_n(\varpi_1, \lambda_1) + \dots, \\ \sigma &= \sigma_0(\varpi_1, \lambda_1) + \varepsilon \sigma_1(\varpi_1, \lambda_1) + \dots + \varepsilon^n \sigma_n(\varpi_1, \lambda_1) + \dots \end{aligned}$$

sont divergentes, en général, quel que soit ε . M. Levi-Civita a prouvé, en effet, qu'il n'existe pas, habituellement, de familles analytiques de solutions quasi-périodiques dans les systèmes canoniques et leurs transformés.

45. **Quasi-périodicité relativement à la longitude astronomique et au temps.** — Reste à voir le caractère des fonctions μ et σ par rapport à la variable φ , puis par rapport aux variables t et θ . Nous nous plaçons toujours dans le cas des mouvements récurrents.

1° *Variable indépendante* v . — v s'introduit par l'équation (99), dans laquelle p_1 et q_1 doivent être supposés fonctions de ϖ_1 et λ_1 . Nous avons donc

$$\frac{dv}{d\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} + \varepsilon U_1(\varpi_1, \lambda_1),$$

ou bien

$$(104) \quad \frac{dv}{d\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} + \varepsilon W_1(\lambda_1, v\lambda_1),$$

$W_1(\theta, \varphi)$ étant périodique en θ et φ , de période 2π . Admettons la notation

$$K = \text{valeur moyenne de } \frac{dv}{d\lambda_1}$$

(l'expression « valeur moyenne » est prise, cette fois, au sens rigoureux).

La différence $\frac{dv}{d\lambda_1} - K$ est une fonction quasi-périodique à valeur moyenne nulle; donc son intégrale, si elle est bornée, est une fonction quasi-périodique ⁽¹⁾. Or, on peut affirmer que cette intégrale est bornée : 1° quand le *rotation number* est rationnel (W_1 est alors une fonction périodique); 2° pour presque toutes les valeurs irrationnelles du *rotation number* pourvu que la fonction $H_1(\lambda_1, \varpi_1)$ figurant dans la formule (103), et traitée comme si λ_1 était constant, possède sa *troisième dérivée* $\frac{d^3 H_1}{d\varpi_1^3}$ de carré intégrable (*critère de M. Kryloff*) ⁽²⁾. Ce cas paraît d'application courante. Le *rotation number* étant fonction de β et γ , on peut dire que la fonction quasi-périodique $\frac{dv}{d\lambda_1} - K$ admettra une intégrale quasi-périodique pour tous les systèmes de valeurs acceptables de β et γ sauf pour des systèmes de ces valeurs appartenant à un certain ensemble dont la mesure relative est nulle par rapport à l'ensemble des systèmes de valeurs (β, γ) qui correspondent aux mouvements récurrents.

⁽¹⁾ Voir J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques* (Collection Julia, Paris, Gauthier-Villars, 1933), p. 82.

⁽²⁾ Il est équivalent de dire que $H_1(\lambda_1, \varpi_1)$, considéré comme fonction de λ_1 seul, a sa troisième dérivée $\frac{d^3 H_1}{d\lambda_1^3}$ de carré intégrable.

Supposons donc que la fonction $\nu = K\lambda_1$, intégrale de $\frac{d\nu}{d\lambda_1} = K$, soit quasi-périodique; nous en déduisons

$$\lambda_1 = \frac{\nu}{K} + \Lambda_1 \left(\frac{\nu}{K}, \frac{\nu\nu}{K} \right),$$

où $\Lambda_1(\theta, \varphi)$ est une fonction continue périodique de période 2π par rapport aux variables θ, φ . Par suite, *les solutions stationnaires de la famille définie par le « rotation number » ν peuvent être présentées (théoriquement) sous la forme*

$$\mu = \mu \left(\frac{\nu}{K}, \frac{\nu\nu}{K} \right), \quad \sigma = \sigma \left(\frac{\nu}{K}, \frac{\nu\nu}{K} \right),$$

elles sont quasi-périodiques relativement à ν , avec les deux fréquences fondamentales $\frac{1}{K}$ et $\frac{\nu}{K}$.

2° *Variable indépendante t .* — Le temps est lié à λ_1 par l'équation différentielle

$$(105) \quad \frac{dt}{d\lambda_1} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + \varepsilon W_1(\lambda_1, \nu\lambda_1) \right] \Gamma(\lambda_1, \nu\lambda_1),$$

qui s'obtient en combinant (104) avec

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{1}{G s^2};$$

$\frac{1}{G s^2}$ s'exprime (n° 36) en fonction de $\sigma, \mu, \frac{d\mu}{d\nu}$, et, par suite, en fonction de ϖ_1 et λ_1 , d'où, en utilisant (103)

$$\frac{1}{G s_2} = \Gamma(\lambda_1, \nu\lambda_1),$$

qui justifie la forme de l'équation (105). La fonction $\Gamma(\theta, \varphi)$ admet la période 2π par rapport à θ et φ .

Appelons Γ la valeur moyenne de $\frac{dt}{d\lambda_1}$, et supposons, comme dans [1°], que la dérivée troisième de la fonction H_1 par rapport à ϖ_1 ait son carré sommable, indépendamment de λ_1 . Alors, en vertu du critère de M. Kryloff, la fonction quasi-périodique $\frac{dt}{d\lambda_1} = \Gamma$ est une dérivée de fonction quasi-périodique, *sauf pour certaines*

valeurs du « rotation number » formant un ensemble de mesure nulle. Ces valeurs étant écartées, on a

$$t = \Gamma \lambda_1 + \text{fonction quasi-périodique de } \lambda_1, \text{ de fréquences } 1 \text{ et } \nu,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda_1 = \frac{t}{\Gamma} + T_1 \left(\frac{t}{\Gamma}, \frac{\nu t}{\Gamma} \right),$$

la fonction $T_1(\theta, \varphi)$ étant continue et périodique en θ, φ , de période 2π . Les solutions stationnaires de la famille définie par le « rotation number » ν sont quasi-périodiques par rapport à t , avec les deux fréquences fondamentales $\frac{1}{\Gamma}, \frac{\nu}{\Gamma}$;

$$\mu = \mu \left(\frac{t}{\Gamma}, \frac{\nu t}{\Gamma} \right), \quad \tau = \tau \left(\frac{t}{\Gamma}, \frac{\nu t}{\Gamma} \right).$$

3° Variable indépendante θ . — Éliminons $d\nu$ entre (9) et (104), et exprimons $\frac{\cos i}{\cos^2 \varphi}$ en fonction de μ et $\frac{d\mu}{d\nu}$, puis en fonction de ϖ_1 et λ_1 ; nous obtiendrons

$$(106) \quad \frac{d\theta}{d\lambda_1} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon\gamma}} + \varepsilon W_1(\lambda_1, \nu\lambda_1) \right] \Xi(\lambda_1, \nu\lambda_1),$$

la fonction $\Xi(\theta, \varphi)$ étant continue et de période 2π par rapport à θ et φ .

Désignons par N la valeur moyenne de $\frac{d\theta}{d\lambda_1}$; le même raisonnement qu'à propos des équations (104) et (105) nous conduira à un résultat analogue : les solutions stationnaires définies par le « rotation number » ν sont représentables, pour presque toutes les valeurs de ν , par des fonctions quasi-périodiques de θ

$$\mu = \mu \left(\frac{\theta}{N}, \frac{\nu\theta}{N} \right), \quad \tau = \tau \left(\frac{\theta}{N}, \frac{\nu\theta}{N} \right),$$

ayant comme fréquences fondamentales $\frac{1}{N}$ et $\frac{\nu}{N}$.

En résumé : en admettant que la fonction $H_1(\lambda_1, \varpi_1)$ de l'équation (103) possède la troisième dérivée $\frac{\partial^3 H_1}{\partial \varpi_1^3}$ de carré sommable quel que soit λ_1 , les coordonnées μ, τ du point mobile sur une orbite récurrente sont des fonctions quasi-périodiques,

à deux fréquences fondamentales, de la longitude θ , ou de la longitude orbitale ν , ou du temps t , à moins que l'orbite envisagée ne fasse partie d'un certain ensemble de mesure nulle par rapport à l'ensemble de toutes les orbites récurrentes.

46. Convergence des séries de Fourier de toutes les fonctions quasi-périodiques relatives aux orbites absolues. — La quasi-périodicité de σ et μ entraîne celle de $\cos \varphi = \sqrt{1 - \mu^2}$, de $\sin i = \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^2}$, de $\cos i$, de $\tan i$ (qui reste borné), de $G = \frac{C}{\cos i}$, de la fonction S définie par l'équation (62), de $s = S + \sigma$, de $r = \frac{1}{s}$, de $\rho = r \cos \varphi$, de $z = r \sin \varphi$, de $u = \frac{1}{\rho}$ (qui reste fini), de $w = \tan \varphi = \frac{z}{\rho}$, de $\frac{d\nu}{dt} = \frac{G}{r^2}$, de $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\rho^2}$, de $\frac{d\theta}{d\nu}$. Il y a encore quasi-périodicité pour les dérivées de toutes les fonctions énumérées $\frac{d\rho}{d\nu}$, $\frac{dr}{d\nu}$, $\frac{dz}{d\nu}$, etc., puis $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, etc., d'où l'on peut déduire la quasi-périodicité de $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho^2}{C} \frac{d\rho}{dt}$, de $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \left(\rho \frac{dz}{dt} - z \frac{d\rho}{dt} \right)$, de

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} \left(\rho \frac{dz}{dt} - z \frac{d\rho}{dt} \right), \quad \dots$$

Ces fonctions, et toutes les autres que l'on peut former avec les coordonnées, les vitesses, les accélérations d'un point décrivant une orbite absolue sont quasi-périodiques, avec deux fréquences fondamentales, par rapport à la variable indépendante adoptée, θ , ν , ou t , pourvu que σ et μ soient quasi-périodiques.

A chaque fonction quasi-périodique correspond, comme on le sait, une série de Fourier qui suffit à définir la fonction. En prenant, par exemple, ρ et z , on a

$$\begin{aligned} \rho(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[(h_n f_1 + k_n f_2)t + l_n], \\ z(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos[(h'_n f_1 + k'_n f_2)t + l'_n], \end{aligned}$$

séries dans lesquelles on peut toujours supposer les coefficients a_n ,

α'_n positifs et les arguments initiaux l_n, l'_n compris entre 0 et 2π ; f_1, f_2 sont les fréquences fondamentales qui interviennent par leurs multiples entiers $h_n f_1, k_n f_2, h'_n f_1, k'_n f_2$.

Les séries de Fourier des fonctions quasi-périodiques ne convergent pas toujours, mais on connaît des critères qui assurent leur convergence dans des cas très étendus. Pour une fonction continue bipériodique, s'il existe des dérivées partielles des quatre premiers ordres continues et bipériodiques, la série de Fourier de la fonction converge absolument et uniformément vers la fonction elle-même, ainsi que l'a montré P. Bohl (1). Dans les problèmes de dynamique qui font l'objet de notre étude, les dérivées totales successives des fonctions bipériodiques existent et sont continues bipériodiques; nous pouvons donc admettre l'existence des dérivées partielles des divers ordres, continues et bipériodiques comme les dérivées totales. En conséquence, *les séries de Fourier de toutes les fonctions bipériodiques se rapportant à une orbite absolue possèdent la convergence absolue et uniforme.*

Dans la représentation donnée plus haut pour $\rho(t)$ et $z(t)$, les signes $\sim$ d'Hurwitz doivent être remplacés par des signes $=$. En nous souvenant que Gylden a nommé « *agrégat périodique* » toute série de Fourier absolument et uniformément convergente (2), nous écrirons

$$\rho(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \text{agrégat de Gylden, de valeur moyenne nulle,}$$

$$z(t) = \text{agrégat de Gylden, de valeur moyenne nulle,}$$

et de même pour les autres fonctions, qu'elles soient exprimées par rapport à t ou à θ ou à ν .

Mentionnons spécialement les relations

$$(107) \quad \nu = gt + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences,}$$

et

$$(108) \quad \theta = jt + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences,}$$

qui se déduisent des intégrales générales de (104), (105) et (106)

(1) Voir la démonstration, par exemple, dans : PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I. Séries multiples.

(2) *Traité des Orbites absolues* (déjà cité), Livre I, Chap. I, n° 6.

en admettant que $\frac{\partial^3 H_1}{\partial \omega_1^3}$ a son carré intégrable; g , *vitesse angulaire moyenne dans l'orbite*, est égal au rapport $\frac{k}{F}$; j , *vitesse angulaire moyenne du mobile projeté sur le plan de l'équateur*, est égal à $\frac{N}{F}$ (voir n° 45) (1). Les agrégats de Gylden des formules ci-dessus s'obtiennent par l'intégration formelle des agrégats qui représentent les fonctions

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad \frac{d\theta}{dt} = j.$$

Ils sont donc, comme ces derniers, à deux fréquences fondamentales.

47. Passage du mouvement dans le plan méridien au mouvement dans l'espace. — Pour définir le mouvement dans l'espace, il suffit d'ajouter aux formules provenant de l'intégration du système en : ρ, z (variable t) ou en : u, ω (variable θ) ou en : s, μ (variable ν), une des deux formules (107) et (108); les agrégats de Gylden qui y figurent sont indifféremment des fonctions de t , de θ ou de ν . La représentation dans l'espace d'un mouvement récurrent de type général se fait donc à l'aide d'une fonction linéaire de t et de trois fonctions quasi-périodiques ayant deux fréquences fondamentales. Mais, en réalité, *le mouvement dans l'espace possède trois fréquences, la troisième étant liée à la vitesse angulaire moyenne : g ou j .*

L'équation de la trajectoire se met, par exemple, sous la forme

$$x = \rho \left(\frac{\theta}{N}, \frac{\nu\theta}{N} \right) \cos \theta, \quad y = \rho \left(\frac{\theta}{N}, \frac{\nu\theta}{N} \right) \sin \theta, \quad z = z \left(\frac{\theta}{N}, \frac{\nu\theta}{N} \right),$$

qui comporte les trois fréquences : $1, \frac{1}{N}, \frac{\nu}{N}$. Le temps s'introduit au moyen de (108)

$$\theta = jt + \Theta \left(\frac{t}{F}, \frac{\nu t}{F} \right)$$

(Θ , fonction bipériodique). La substitution dans les équations de

(1) La différence $g - j$ est une constante de l'ordre de ϵ (cf. nos 50 et 73).

la trajectoire doit donner, pour ρ et z , des fonctions bipériodiques de $\frac{t}{\Gamma}$ et $\frac{\nu t}{\Gamma}$ (n° 43); on aura donc comme équations de la trajectoire

$$x = x\left(\frac{t}{\Gamma}, \frac{\nu t}{\Gamma}, jt\right), \quad y = y\left(\frac{t}{\Gamma}, \frac{\nu t}{\Gamma}, jt\right), \quad z = z\left(\frac{t}{\Gamma}, \frac{\nu t}{\Gamma}\right),$$

avec les *trois fréquences* : $\frac{1}{\Gamma}, \frac{\nu}{\Gamma}, j$.

Si le nombre ν est rationnel, ou commensurable avec j , le nombre des fréquences fondamentales se réduit à deux: si, en outre, Γ et j sont commensurables entre eux, il n'y a plus qu'une fréquence, et la trajectoire dans l'espace est périodique.

48. Résumé et conclusion du chapitre. Hiérarchie des mouvements récurrents. — Faisons la synthèse des résultats obtenus au cours de ce chapitre. L'étude des mouvements dans un champ de forces ayant un axe de révolution et un équateur se fait d'abord dans le plan méridien du point mobile, où le nombre de degrés de liberté est égal à 2. On suppose réalisée la stabilité de Hill, en vertu de laquelle la trajectoire reste à l'intérieur d'un ovale fermé. L'introduction de deux constantes arbitraires, β, γ , variant dans un certain domaine, permet de présenter toutes les solutions des équations du mouvement sous une forme approchée qui est quasi-périodique en ν avec deux fréquences fondamentales; on aurait également des solutions approchées quasi-périodiques si l'on prenait θ ou t comme variable indépendante. Ces résultats formels s'obtiennent par les méthodes de la Mécanique non linéaire, mais dans le domaine de variation de β et γ on laisse de côté une infinité de points appartenant à un ensemble de mesure nulle.

Les solutions approchées quasi-périodiques ne correspondent pas, en général, à des solutions réellement quasi-périodiques. Cependant, étant données des conditions initiales quelconques, il existe des conditions initiales aussi voisines qu'on le veut de celles-là, et telles que les coordonnées du point mobile s'expriment rigoureusement par des fonctions quasi-périodiques. Toute solution quasi-périodique approchée a donc la même allure, pendant un temps aussi long qu'on le veut, que les solutions quasi-

périodiques exactes situées dans un voisinage suffisamment restreint de la solution quasi-périodique approchée. On est ainsi amené à remplacer les solutions réelles, qui ne sont pas rigoureusement quasi-périodiques, par des solutions quasi-périodiques voisines. Ceci est pour l'étude qualitative des mouvements. Au point de vue pratique, les solutions quasi-périodiques exactes ne peuvent pas plus que les autres être représentées par leurs véritables développements, du moins en général : il faut se contenter de séries asymptotiques.

Une solution quasi-périodique exacte correspond à un mouvement récurrent. Les mouvements récurrents se classent par familles, chaque famille étant caractérisée par un *rotation number* ν , fonction des paramètres β et γ qui s'associent suivant certaines lois inconnues pour donner les familles en question. Un mobile animé d'un mouvement récurrent décrit, par définition, une *orbite absolue*; le rapport des fréquences du mouvement est égal à ν , mais en *Mécanique Céleste* ν est voisin de 1, de sorte que les fréquences diffèrent peu l'une de l'autre. Si ν est rationnel, les mouvements récurrents de la famille dégèrent en un nombre fini de mouvements périodiques.

Lorsqu'on passe du mouvement relatif dans le plan méridien au mouvement réel dans l'espace, une fréquence supplémentaire s'introduit, due à la vitesse angulaire moyenne.

Les mouvements quasi-périodiques par rapport à φ , θ ou t ne sont pas les seuls mouvements récurrents. En effet, les mouvements récurrents possèdent, d'après leur nature, une propriété de quasi-périodicité relativement à une variable angulaire qui n'est ni φ ni θ ; cette variable est liée au déplacement des nœuds ou à celui des apsides de l'orbite; si on l'exprime en fonction de φ , θ ou t , la quasi-périodicité n'est pas forcément maintenue. Dans les problèmes astronomiques usuels, elle subsiste pour les valeurs du *rotation number* qui n'appartiennent pas à un certain ensemble de mesure nulle; donc, presque tous les mouvements récurrents sont quasi-périodiques.

Il peut arriver que les séries formelles obtenues par la méthode d'approximations successives de M. Kryloff soient convergentes. Les mouvements quasi-périodiques correspondants constituent une

classe exceptionnelle de mouvements récurrents, représentables parmi tous les autres par un ensemble de mesure nulle.

Finalement, *les mouvements récurrents dans les champs de gravitation de la forme $U(r, \sin^2 \varphi)$ se rangent en quatre catégories* (nous nous bornons aux mouvements relatifs dans le plan méridien) :

- 1° *les mouvements périodiques ordinaires;*
- 2° *les mouvements bipériodiques représentables analytiquement (suivant les puissances du petit paramètre ε) par des séries trigonométriques convergentes, la variable indépendante étant ν , θ ou t . Ce sont les mouvements récurrents de ce type que Gylden a envisagés dans son Traité des Orbites absolues; on n'est malheureusement pas certain qu'ils existent dans tous les systèmes dynamiques de la Mécanique Céleste;*
- 3° *les mouvements bipériodiques avec des séries trigonométriques convergentes pour lesquelles on ne connaît aucun moyen pratique de détermination. Ces séries ne sont pas analytiques relativement au petit paramètre ε , et l'on n'est pas en état de mieux préciser leur nature;*
- 4° *les mouvements récurrents dans lesquels les coordonnées ne sont pas des fonctions bipériodiques de ν , θ ou t .*

La troisième catégorie est celle des mouvements récurrents de type général; les trois autres englobent les mouvements récurrents de type exceptionnel.

Pour conclure, faisons remarquer que le procédé du n° 42 aurait besoin d'être appliqué à chaque forme particulière du potentiel $U(r, \sin^2 \varphi)$. Mais comme, dans le présent Mémoire, nous n'avons pas en vue les applications numériques, nous jugeons inutile de faire le calcul détaillé d'une solution stationnaire approchée, qui ne conduirait à aucun résultat théorique intéressant.

CHAPITRE VI.

DÉPLACEMENT DE LA LIGNE DES NŒUDS.

VARIATION DE L'INCLINAISON.

49. **Variations de l'inclinaison et de la longitude du nœud, déduites des équations différentielles du mouvement.** — Nous considérons toujours les mouvements stables au sens de Hill dans les champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur. Soit P la position du point mobile à l'instant t . La ligne des nœuds à l'instant t est, par définition, l'intersection du plan xOy avec le plan contenant l'origine et la tangente en P à la trajectoire. Le nœud ascendant N fixe le sens positif sur la ligne des nœuds au moment où P coïncide avec N; aux autres instants, le sens positif résulte de la variation continue de la ligne des nœuds. La longitude du nœud ascendant sera appelée, suivant l'usage, *longitude du nœud*; elle est représentée par l'angle ω si elle est comptée dans le plan de l'équateur, et par l'angle ψ si elle est comptée dans le plan mobile de Hansen (*voir* n° 1).

Appliquons à l'équation

$$\frac{d^2\mu}{dv^2} + (1 - L)\mu = 0,$$

du groupe (55) la transformation (84) en p, ζ , et annulons la constante arbitraire β ; il vient

$$\frac{d\zeta}{dv} = 1 - L \sin^2 \zeta, \quad \frac{1}{p} \frac{dp}{dv} = L \sin \zeta \cos \zeta.$$

Les formules

$$\mu = p \sin \zeta, \quad \frac{d\mu}{dv} = p \cos \zeta,$$

de la transformation, donnent, d'ailleurs,

$$p^2 = \mu^2 + \left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^2,$$

et p ne s'annule jamais tant que ν reste fini, à moins que μ et $\frac{d\mu}{d\nu}$ ne soient constamment nuls. En adoptant pour p la détermination positive, on a, d'après (7) :

$$p = \sin i.$$

Rapprochons maintenant les formules

$$\mu = \sin i \sin \zeta, \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \sin i \cos \zeta,$$

des formules

$$\mu = \sin i \sin(\nu - \psi), \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \sin i \cos(\nu - \psi),$$

tirées de (4) et (6); nous voyons que $\nu - \zeta$ représente, à un multiple près de 2π , la longitude orbitale du nœud. Le système différentiel en p, ζ peut donc s'écrire :

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{d\nu} = L \sin^2(\nu - \psi), \\ \frac{1}{\sin i} \frac{d(\sin i)}{d\nu} = L \sin(\nu - \psi) \cos(\nu - \psi). \end{array} \right.$$

D'une manière tout à fait analogue, la transformation

$$\omega = q \sin(\theta - \alpha), \quad \frac{d\omega}{d\theta} = q \cos(\theta - \alpha) \quad (q > 0)$$

remplace la deuxième équation (54)

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + (1 - W)\omega = 0,$$

par le système

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\theta} &= W \sin^2(\theta - \alpha), \\ \frac{1}{q} \frac{dq}{d\theta} &= W \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Mais la comparaison de la formule

$$q = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2},$$

avec la relation

$$(110) \quad \operatorname{tang} i = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{d\omega}{d\theta}\right)^2},$$

qui se déduit de (10) et (11), prouve l'identité de q et de $\operatorname{tang} i$. Les formules de transformation, rapprochées ensuite de (10) et (11), montrent que la longitude du nœud, ω , diffère de α d'un multiple de 2π ; on a, par conséquent,

$$(111) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{d\theta} = W \sin^2(\theta - \omega), \\ \frac{1}{\operatorname{tang} i} \frac{d(\operatorname{tang} i)}{d\theta} = W \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega). \end{array} \right.$$

30. **Rétrogradation des nœuds. Croissances comparées de la longitude orbitale et de la longitude équatoriale.** — Le déplacement de la ligne des nœuds s'étudie au moyen de l'équation

$$\frac{d\psi}{d\nu} = L \sin^2(\nu - \psi),$$

si on le rapporte au plan instantané de Hansen, ou au moyen de l'équation

$$\frac{d\omega}{d\theta} = W \sin^2(\theta - \omega),$$

si le plan de référence est celui de l'équateur. L'intégration approchée de l'une ou l'autre de ces équations donne une expression approchée de la fonction $\psi(\nu)$ ou de la fonction $\omega(\theta)$, d'où il est facile de passer à des expressions en fonction du temps. Remarquons du reste que si l'on connaît ω , par exemple, comme fonction du temps, on en déduit immédiatement ψ en intégrant l'équation (1).

L et W étant des quantités négatives (n° 20), *la ligne des nœuds se déplace constamment dans le sens rétrograde, aussi bien dans le plan de l'équateur que dans le plan mobile de Hansen.* Mais le déplacement orbital est plus lent que le déplacement équatorial, car la relation différentielle (1)

$$d\psi = \cos i \, d\omega,$$

entraîne

$$|d\psi| < |d\omega|.$$

La conséquence très importante de ce fait est que *la longitude ν de Hansen croît plus vite que la longitude θ dans le plan de l'équateur*. En effet, entre deux passages consécutifs à un nœud ascendant, la longitude θ subit un accroissement égal à $2\pi - \Delta\omega$, tandis que la longitude ν subit un accroissement égal à $2\pi - \Delta\psi$ ($\Delta\omega$ et $\Delta\psi$ désignent les déplacements rétrogrades de la ligne des nœuds dans l'intervalle de temps considéré). Or, on a

$$\Delta\psi < \Delta\omega,$$

d'où l'on déduit

$$2\pi - \Delta\psi > 2\pi - \Delta\omega.$$

Donc, à deux valeurs de ν dont la différence est un peu supérieure à 2π peuvent correspondre deux valeurs de θ dont la différence est inférieure à 2π . Nous devons tenir compte de cette remarque en étudiant le déplacement des apsides (¹).

51. Limites du déplacement de la ligne des nœuds pendant une révolution draconitique. — La première équation (111) exprime que les nœuds rétrogradent quand θ croît, ou, ce qui revient au même, quand le temps augmente. La vitesse de rotation de la ligne des nœuds s'annule chaque fois que $\sin(\theta - \omega) = 0$, c'est-à-dire à chaque coïncidence du point mobile avec un nœud. La variation de θ entre une de ces coïncidences et la suivante est inférieure à π , mais pour avoir un résultat quantitatif plus précis nous introduirons les bornes $-M^2$ (inférieure), et $-m^2$ (supérieure), de la fonction W . (Dans la pratique, m et M sont petits, et assez rapprochés l'un de l'autre.)

Comparons une intégrale ω de l'équation

$$\frac{d\omega}{d\theta} = W \sin^2(\theta - \omega)$$

à une intégrale λ de

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = -M^2 \sin^2(\theta - \lambda),$$

en partant des valeurs initiales

$$\lambda_0 = \omega_0 = \theta_0 - k\pi.$$

(¹) Voir Chapitre VIII.

Quand θ tend vers θ_0 , le quotient $\frac{\lambda}{\omega}$ tend vers 1, mais le quotient $\frac{\lambda'}{\omega}$ tend vers $-\frac{M^2}{W}$, qui est supérieur à 1. Donc, à partir de la valeur ω_0 , ω décroît moins rapidement que λ à partir de la valeur λ_0 (la fonction $\lambda' - \omega'$ est négative, $\lambda - \omega$ est décroissante). Mais $\theta - \omega$ et $\theta - \lambda$ sont croissantes, puisque W et M^2 sont petits par rapport à 1. On voit que $\theta - \lambda$ croît plus rapidement que $\theta - \omega$, donc $\sin^2(\theta - \lambda)$ atteindra plus rapidement que $\sin^2(\theta - \omega)$ la valeur 1. Autrement dit, l'intervalle entre le zéro et le maximum de $\sin^2(\theta - \omega)$ est supérieur à l'intervalle entre le zéro et le minimum de $\frac{d\lambda}{d\theta}$; or, ce dernier intervalle est $\frac{\pi}{2\sqrt{1+M^2}}$, puisque

$$\tan(\theta - \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+M^2}} \tan[\sqrt{1+M^2}(\theta - \theta_0)],$$

et que le minimum de $\frac{d\lambda}{d\theta}$ correspond à $\tan(\theta - \lambda) = \pm \infty$. Considérons maintenant l'intervalle entre le maximum de $\sin^2(\theta - \omega)$ et le zéro suivant; nous pouvons poser

$$\theta = -\theta_1, \quad \lambda = -\lambda_1, \quad \omega = -\omega_1;$$

les courbes (θ, ω) , (θ, λ) se trouvent parcourues en sens inverse et le résultat précédent est applicable.

Comparons, en second lieu, une intégrale de l'équation

$$\frac{d\omega}{d\theta} = W \sin^2(\theta - \omega)$$

à une intégrale de

$$\frac{d\mu}{d\theta} = m^2 \sin^2(\theta - \omega),$$

en partant des valeurs initiales

$$\mu_0 = \omega_0 = \theta_0 - k\pi.$$

Nous avons immédiatement

$$\tan(\theta - \mu) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \tan[\sqrt{1+m^2}(\theta - \theta_0)].$$

Quand θ tend vers θ_0 , le quotient $\frac{\mu}{\omega}$ tend vers 1, mais le quo-

tient $\frac{\mu'}{\omega}$ tend vers $\frac{-m^2}{W}$ qui est inférieur à 1. Donc, à partir de la valeur ω_0 , ω décroît plus rapidement que μ à partir de la valeur μ_0 (la fonction $\mu' - \omega'$ est positive, $\mu - \omega$ est croissante). $\theta - \omega$ et $\theta - \mu$ sont croissantes, mais la première plus rapidement que la seconde. Le maximum de $\sin^2(\theta - \omega)$ sera donc atteint avant le minimum de $\frac{d\mu}{d\theta}$, c'est-à-dire avant que θ ait augmenté de $\frac{\pi}{2\sqrt{1+m^2}}$.

On peut faire le même raisonnement pour le maximum de $\sin^2(\theta - \omega)$ et le zéro qui le suit.

En définitive, les zéros et les maxima de $\sin^2(\theta - \omega)$ se succèdent alternativement à des intervalles moindres que $\frac{\pi}{2\sqrt{1+m^2}}$ et plus grands que $\frac{\pi}{2\sqrt{1+M^2}}$; la variation de θ entre un zéro et le suivant, c'est-à-dire entre deux nœuds effectifs qui se suivent, est comprise entre $\frac{\pi}{\sqrt{1+M^2}}$ et $\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}$; *le déplacement de la ligne des nœuds pendant une révolution draconitique est compris entre* $2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ *et* $2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+M^2}}\right)$.

Si nous nous reportons aux formules (10) et (11), nous voyons que, tandis que les zéros de $\sin^2(\theta - \omega)$ coïncident avec les zéros de ω , c'est-à-dire de φ , les maxima de $\sin^2(\theta - \omega)$ ont lieu en même temps que les zéros de $\frac{d\omega}{d\theta}$, c'est-à-dire que les points stationnaires de φ . Le théorème précédent peut donc s'énoncer ainsi :

la latitude φ est une fonction oscillante de θ , telle que la variation de θ entre un zéro de φ et le point stationnaire qui le suit ou le précède est comprise entre $\frac{\pi}{2\sqrt{1+M^2}}$ *et* $\frac{\pi}{2\sqrt{1+m^2}}$.

La première équation (109), traitée de la manière qui vient d'être exposée, conduirait, avec ω comme variable indépendante, à un théorème identique.

§2. Application aux orbites quasi-circulaires d'inclinaisons très faibles. Une trajectoire étant donnée, stable au sens de Hill, faisons tendre les conditions initiales vers des limites correspondant

à l'équilibre relatif dans le plan méridien; les coordonnées r, φ du mobile tendront uniformément vers les valeurs constantes $r = \alpha$, $\varphi = 0$; la fonction W tendra uniformément vers la limite

$$2 \frac{\alpha^2}{C^2} \left[\frac{\partial U}{\partial (\sin^2 \varphi)} \right]_{\varphi=0},$$

que nous désignerons par $-\Lambda (\Lambda > 0)$, et le mouvement de la ligne des nœuds, défini par la première équation (111), tendra d'une manière uniforme, pour θ compris entre deux limites données, vers celui qui est défini par

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\Lambda \sin^2(\theta - \omega),$$

c'est-à-dire, en termes finis,

$$(112) \quad \tan(\theta - \omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda}} \tan[\sqrt{1 + \Lambda} (\theta - \theta_0)].$$

Le nombre $\frac{\pi}{\sqrt{1 + \Lambda}}$ représente la limite de la variation de θ entre deux nœuds effectifs consécutifs; cette variation est comprise entre

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + M^2}} \text{ et } \frac{\pi}{\sqrt{1 + m^2}}, \text{ qui tendent tous deux vers } \frac{\pi}{\sqrt{1 + \Lambda}}.$$

En supposant que le potentiel soit de la forme

$$U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi),$$

avec ε petit, la constante Λ est de l'ordre de ε , comme $\frac{\partial U}{\partial (\sin^2 \varphi)}$.

Si l'orbite a une inclinaison non pas nulle, mais très faible, de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, pour fixer les idées, $\sin^2 \varphi$ est de l'ordre de ε , et l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial (\sin^2 \varphi)} = \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial (\sin^2 \varphi)} = \varepsilon \left[\frac{\partial \Omega}{\partial (\sin^2 \varphi)} \right]_{\varphi=0} + \text{termes en } \varepsilon^2.$$

Convenons, comme dans les Chapitres III et IV, de négliger ε^2 : la fonction W se trouve remplacée par la constante $-\Lambda$, et l'équation (112) a lieu, à des quantités près de l'ordre de ε^2 , pour l'orbite envisagée. L'expression de $\frac{d\omega}{d\theta}$ en fonction de θ seul est

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{-\Lambda \tan^2[\sqrt{1 + \Lambda} (\theta - \theta_0)]}{1 + \Lambda + \tan^2[\sqrt{1 + \Lambda} (\theta - \theta_0)]},$$

toujours avec la même approximation. On voit que $\frac{d\omega}{d\theta}$, fonction périodique de θ , est développable suivant une série de Fourier en $\theta\sqrt{1+A}$, série absolument et uniformément convergente. Le terme constant de la série est égal au quotient de la variation de ω par la variation de θ entre deux nœuds consécutifs, c'est-à-dire

$$\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+A}} - \pi \right) : \frac{\pi}{\sqrt{1+A}} = 1 - \sqrt{1+A}.$$

On a donc

$$\frac{d\omega}{d\theta} = 1 - \sqrt{1+A} + \text{fonction périodique, bornée,}$$

d'où

$$\omega = (1 - \sqrt{1+A})\theta + \text{fonction périodique, bornée,}$$

et comme

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{a^2},$$

on peut écrire

$$(113) \quad \omega = \frac{C}{a^2} (1 - \sqrt{1+A})t + \text{fonction de } t, \text{ périodique et bornée.}$$

Ce résultat n'est rigoureusement vrai que pour les orbites circulaires d'inclinaison nulle considérées comme trajectoires limites, mais il s'applique d'une manière approchée à toute orbite d'inclinaison très petite assimilable à un cercle de centre O. *les coefficients de la formule (113) comportant des erreurs de l'ordre de ε^2 si l'inclinaison est de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$.* Nous avons là un exemple dans lequel la longitude du nœud s'obtient, pratiquement, en remplaçant le mouvement donné par un mouvement récurrent ($r=a$, $z=0$) qui possède presque les mêmes conditions initiales.

§3. Longitude du nœud sur une orbite absolue ordinaire. — La formule (113) exprime que la ligne des nœuds de l'orbite limite $r=a$, $z=0$, possède un moyen mouvement négatif, égal à $\frac{C}{a^2} (1 - \sqrt{1+A})$. La condition pour qu'il existe un moyen mouvement du nœud est que la longitude du nœud soit la somme d'une fonction linéaire de t et d'une fonction bornée quel que soit t . Il

en est ainsi, nous allons le voir, pour les orbites de type général, c'est-à-dire pour les orbites stables au sens de Poisson.

Soit d'abord une orbite absolue sur laquelle les coordonnées sont des fonctions quasi-périodiques de t ou de θ . Nous avons établi (n° 46) la quasi-périodicité de ω , $\frac{d\omega}{d\theta}$, $\text{tang } i$, etc. Il s'ensuit, d'après (10) et (11), que

$$\sin(\theta - \omega) = \frac{\omega}{\text{tang } i} \quad \text{et} \quad \cos(\theta - \omega) = \frac{1}{\text{tang } i} \frac{d\omega}{d\theta}$$

sont quasi-périodiques. W , fonction bornée de r et de $\sin^2 \varphi$, est, également, quasi-périodique. De même $\frac{d\omega}{d\theta}$. Mais au lieu de faire intervenir le nombre limité de fréquences fondamentales qui fait la quasi-périodicité de ces fonctions, considérons-les du point de vue de M. Harald Bohr ⁽¹⁾, basé sur la distribution des presque-périodes.

Soit $\mathfrak{S}$ une presque-période commune ⁽²⁾ à $\sin(\theta - \omega)$ et $\cos(\theta - \omega)$, fonctions de θ , relativement au nombre β inférieur à 1. Admettons la notation

$$\theta - \omega = \lambda.$$

On voit facilement qu'il existe un entier l tel que

$$|\lambda(\theta + \mathfrak{S}) - \lambda(\theta) - 2l\pi| < 2 \arccos(1 - \beta),$$

et un autre entier m tel que, h désignant la valeur moyenne de $\frac{d\lambda}{d\theta}$, on ait

$$|h\mathfrak{S} - 2m\pi| < \delta \quad \text{avec} \quad 0 < \delta < \pi.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 177, 1923, p. 737 et 1090. La propriété fondamentale des fonctions quasi-périodiques et presque-périodiques est la suivante : à tout nombre positif δ , aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre une longueur D , appelée intervalle d'inclusion, telle que tout intervalle de longueur D contienne au moins une presque-période appartenant à la fonction $f(x)$ considérée et au nombre δ , c'est-à-dire contienne un nombre τ pour lequel l'inégalité

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \delta$$

a lieu quel que soit x . Les fonctions quasi-périodiques sont un cas particulier des fonctions presque-périodiques.

⁽²⁾ La distribution des presque-périodes communes à deux fonctions presque-périodiques est analogue à celle des presque-périodes de chaque fonction; une longueur Δ (intervalle d'inclusion) joue le même rôle que la longueur D de la note précédente.

En posant

$$F(\theta) = \lambda(\theta) - h\theta,$$

on déduit de ces deux inégalités

$$|F(\theta + \mathfrak{Z}) - F(\theta) - 2(l - m)\pi| < \delta + 2 \arccos(1 - \beta).$$

Mais la fonction

$$\Phi(\theta) = F(\theta + \mathfrak{Z}) - F(\theta)$$

est presque-périodique, car si l'on pose

$$f = \frac{d\lambda}{d\theta} - h.$$

f est presque-périodique, et, pour toute presque-période τ de f relative à γ , on a

$$\left| \int_0^{\theta + \mathfrak{Z}} [f(\theta + \tau) - f(\theta)] d\theta \right| < \gamma \mathfrak{Z}.$$

Or, l'intégrale $\int_0^{\theta + \mathfrak{Z}} f(\theta) d\theta$ n'est pas autre chose que la fonction $\Phi(\theta)$; de plus, $f(\theta)$ ayant zéro comme valeur moyenne, il en est de même de l'intégrale susdite. La fonction $\Phi(\theta)$ prend donc la valeur zéro quand θ varie, et cela exige $l = m$, puisque $\delta + 2 \arccos(1 - \beta)$ est inférieur à 2π . On a ainsi

$$|F(\theta + \mathfrak{Z}) - F(\theta)| < \delta + 2 \arccos(1 - \beta).$$

Cette inégalité exprime que $F(\theta)$, c'est-à-dire $\lambda - h\theta$, est une fonction presque-périodique; en effet, β tend vers zéro en même temps que δ , et les presque-périodes de $F(\theta)$ relatives au nombre $\delta + 2 \arccos(1 - \beta)$ sont les mêmes que les presque-périodes communes à $\sin \lambda$ et $\cos \lambda$ relativement au nombre β .

Revenons aux anciennes notations et désignons par $-p$ la valeur moyenne de $\frac{d\omega}{d\theta}$; nous avons

$$h = 1 + p, \quad \lambda - h\theta = -\omega - p\theta,$$

et

$$\omega = -p\theta + \text{fonction presque-périodique de } \theta.$$

Mais en dérivant cette relation, on doit trouver

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \text{fonction quasi-périodique de } \theta, \text{ à deux fréquences fondamentales,}$$

puisque $\frac{d\omega}{d\theta}$ est le produit de fonctions bipériodiques possédant les mêmes fréquences fondamentales. Donc la fonction presque-périodique qui figure dans l'expression de ω n'est autre qu'une fonction quasi-périodique à deux fréquences fondamentales. En nous reportant au n° 46, nous écrirons

$$(114) \quad \omega = -p\theta + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences.}$$

Étant donné qu'il y a rétrogradation continue des nœuds, la constante p est positive, et la dérivée de l'agrégat de Gylden est bornée supérieurement par le nombre p ; elle est égale à p quand $\theta - \omega = k\pi$.

De la relation (114) on déduit immédiatement, à l'aide de (108) :

$$(115) \quad \omega = -p\theta + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences.}$$

Si l'on envisage, maintenant, la longitude orbitale du nœud dans le plan de Hansen, les mêmes procédés permettent d'établir la formule

$$(116) \quad \psi = -l\nu + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences,}$$

où $-l$ désigne la valeur moyenne, négative, de $\frac{d\psi}{d\nu}$; puis, en utilisant (107),

$$(117) \quad \psi = -lgt + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences}$$

On voit, par (115), que le moyen mouvement de la ligne des nœuds dans le plan de l'équateur est égal au produit des valeurs moyennes de $\frac{d\omega}{d\theta}$ et $\frac{d\theta}{dt}$. D'autre part, d'après (117), la ligne des nœuds possède un moyen mouvement dans le plan orbital, qui s'obtient en faisant le produit de la valeur moyenne de $\frac{d\psi}{d\nu}$ par celle de $\frac{d\nu}{dt}$.

Les formules (114), (115), (116), (117), établies pour une orbite absolue de type général, sont applicables, dans la pra-

tique, à toute orbite dont les éléments initiaux diffèrent assez peu des éléments de l'orbite absolue. L'erreur commise reste très faible pendant un temps très long, conformément aux considérations du Chapitre précédent.

§4. Existence d'un moyen mouvement sidéral, d'un moyen mouvement des nœuds et d'un moyen mouvement des apsides pour toutes les orbites stables à la Poisson. — La position exacte de la ligne des nœuds peut cependant s'exprimer, en fonction du temps, par une formule analogue à (115), lorsque la trajectoire considérée, sans être quasi-périodique ni périodique, est stable au sens de Poisson.

Si nous nous donnons, en effet, la constante des forces vives, le domaine des états de mouvement du point (φ, z) (n° 39) est à trois dimensions, et nous pouvons prendre comme surface de section celle qui est définie, dans ce domaine, par $z = 0$. Soit P l'un des points d'intersection d'une trajectoire ordinaire avec la surface de section; il existe une infinité d'autres points d'intersection quand le temps croît ou décroît. Désignons par $t_n(P)$ l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage du mobile au point P et le $n^{\text{ième}}$ passage à travers la surface de section, antérieurement ou postérieurement au passage en P et dans le même sens. D'après le lemme établi par M. Birkhoff ⁽¹⁾ pour sa démonstration du théorème ergodique, le rapport $\frac{t_n(P)}{n}$ tend pour $n \rightarrow \pm \infty$ vers une limite $\tau(P)$ qui est la durée moyenne entre deux intersections consécutives de même sens. En admettant qu'il y a *transitivité forte*, ce qui est extrêmement probable si l'on s'en rapporte aux opinions de la plupart des auteurs actuels ⁽²⁾, la fonction $\tau(P)$ est constante, donc indépendante de P, sauf si le point P est l'origine d'une trajectoire périodique ou récurrente. Cette valeur constante est égale au rapport du volume du domaine des états de mouvement à la quantité de flux à travers la surface de section.

Considérons maintenant le problème à trois degrés de liberté

⁽¹⁾ *Proceed. Nation. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 17, 1931, p. 650-660.

⁽²⁾ Voir à ce sujet : *Proceed. Nation. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 18, 1932, p. 279-282. La transitivité forte est appelée, dans cette Note, *transitivité métrique*.

(ρ, θ, z) , dans l'espace; h et C étant donnés, les six dimensions du domaine des états de mouvement se réduisent à quatre, et les surfaces de section sont tri-dimensionnelles dans un hyperespace. En prenant comme surface de section $\theta = 0$, l'application du lemme de M. Birkhoff conduit à l'existence d'une durée moyenne pour les intervalles entre deux passages consécutifs dans le demi-plan $\theta = 0$. Cela signifie que *la révolution sidérale du corps céleste possède une durée moyenne quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, pourvu que l'orbite soit stable au sens de Poisson*. Cette durée moyenne ne varie pas avec l'orbite envisagée, si la transitivité est forte et s'il ne s'agit pas d'orbites périodiques ou récurrentes.

Enfin en changeant les variables et en prenant comme surface de section $r' \left(= \frac{dr}{dt} \right) = 0$ (il n'est d'ailleurs pas nécessaire de revenir au mouvement à deux degrés de liberté dans le plan méridien), on voit que l'intervalle de temps entre deux apsides consécutives de même nom possède, lui aussi, une valeur moyenne, sur les mêmes orbites, et que, dans les mêmes conditions, cette valeur moyenne est constante.

Donc, *dans les champs de forces $U(r, \sin^2 \varphi)$, la révolution sidérale, la révolution draconitique et la révolution anomalistique admettent des durées moyennes sur presque toutes les trajectoires. En conséquence, les lignes des nœuds et des apsides possèdent chacune un moyen mouvement sur ces trajectoires. Dans l'hypothèse de la transitivité forte, le moyen mouvement sidéral, le moyen mouvement des nœuds et le moyen mouvement des apsides dépendent seulement des constantes des forces vives et des aires si l'on exclut les trajectoires récurrentes ou périodiques*. On a les formules rigoureuses :

$$(118) \quad \theta = j_0 t + \text{fonction bornée du temps} \quad (j_0 = \text{const.}),$$

$$(119) \quad \omega = -p_0 j_0 t + \text{fonction bornée du temps} \quad (j_0, p_0 = \text{const.}),$$

et une formule analogue à (119) pour la longitude du périastre.

Mais les moyens mouvements contenus dans ces trois formules sont, en général, inaccessibles à l'observation. Un nombre de siècles extrêmement grand paraît nécessaire pour les mettre en évidence, lorsque l'ovale $F + h = 0$, de Hill (n° 30), a des dimen-

sions tant soit peu appréciables (1). Dans la pratique, l'orbite réelle pouvant être remplacée par une orbite quasi-périodique, tout se passera, pendant longtemps, comme si les moyens mouvements étaient égaux aux coefficients de t dans des formules telles que (108) et (115). En faisant varier t , par la pensée, de $-\infty$ à $+\infty$, on pourra ainsi adopter comme moyens mouvements successifs sur l'orbite réelle les moyens mouvements d'une infinité d'orbites récurrentes convenablement choisies.

§§. **Oscillations de l'inclinaison.** — Corrélativement à la variation de la longitude du nœud, il y a lieu d'étudier celle de l'inclinaison, définie par la deuxième équation du groupe (109) ou par la deuxième du groupe (111). Prenons, par exemple, cette dernière :

$$\frac{1}{\tan g i} \frac{d(\tan g i)}{d\theta} = W \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega).$$

Nous avons vu (n° 49) que si i n'est pas constamment nul, il ne devient pas égal à zéro pour des valeurs finies du temps; d'autre part il ne peut pas croître au delà d'une certaine limite inférieure à $\frac{\pi}{2}$, à cause de la stabilité de Hill.

La dérivée de $\tan g i$ par rapport à θ s'annule quand $\sin(\theta - \omega) = 0$ et quand $\cos(\theta - \omega) = 0$. L'équation $\sin(\theta - \omega) = 0$ a pour solutions les nœuds effectifs; l'équation $\cos(\theta - \omega) = 0$ est équivalente à $\frac{d\omega}{d\theta} = 0$, ou $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ou encore :

$$y \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) - x \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = 0,$$

et cette égalité exprime que le rayon vecteur est perpendiculaire à la ligne des nœuds; on a alors : $i = |\varphi|$, et $|\varphi|$ (mais pas $|z|$, en général) passe par un maximum. Toutes ces positions correspondent aux extrema de i . En ayant égard au fait que W est négatif, on voit que i est maximum aux nœuds effectifs (quand φ s'annule) et minimum quand le rayon vecteur est perpendi-

(1) S'il y a transitivity forte, l'inclinaison et l'excentricité doivent passer au voisinage de toutes les valeurs compatibles avec l'existence de l'anneau de Hill.

culaire à la ligne des nœuds (φ étant alors stationnaire) (1). Entre deux nœuds consécutifs, la trajectoire est incurvée vers le plan xOy .

Soit i_1 l'inclinaison au moment du passage à un nœud, et i_2 l'inclinaison minima qui précède ou qui suit ce nœud. Le théorème de la moyenne, appliqué à la deuxième équation (111) mise sous la forme

$$\frac{d(\log \tan g i)}{d\theta} = \left[\frac{-W}{4 \left(1 - \frac{d\omega}{d\theta} \right)} \right] \left[-2 \left(1 - \frac{d\omega}{d\theta} \right) \sin 2(\theta - \omega) \right],$$

donne

$$\log \frac{\tan g i_2}{\tan g i_1} = B [\cos 2(\theta_2 - \omega_2) - \cos 2(\theta_1 - \omega_1)],$$

où B désigne une valeur moyenne de la fonction $\frac{-W}{4 \left(1 - \frac{d\omega}{d\theta} \right)}$ dans l'intervalle en θ qui sépare les valeurs stationnaires i_1 et i_2 . Mais θ_2 et θ_1 correspondent respectivement à un point stationnaire et un zéro de φ ; on a donc :

$$\log \frac{\tan g i_2}{\tan g i_1} = B(-1 - 1) = -2B \quad \text{ou} \quad \log \frac{\tan g i_1}{\tan g i_2} = 2B,$$

et, comme B est compris (voir n° 54) entre $\frac{m^2}{4(1 + M^2)}$ et $\frac{M^2}{4}$:

$$\frac{m^2}{2(1 + M^2)} < \log \frac{\tan g i_1}{\tan g i_2} < \frac{M^2}{2}.$$

(1) Les résultats concernant les inégalités des nœuds et de l'inclinaison peuvent être contrôlés ou mis sous une forme différente au moyen des formules (1) à (9). Par exemple :

$\frac{d\omega}{dt}$ s'annule en même temps que $\frac{d\psi}{dt}$ et que $\sin(\nu - \psi)$ (nœuds effectifs).

$\frac{di}{dt}$ s'annule quand $\frac{d\psi}{dt} = 0$ et quand $\cos(\nu - \psi) = 0$.

Les maxima de $|\varphi|$ ont lieu quand $\cos(\nu - \psi) = 0$.

L'équation (28) fait retrouver les extrema de i par l'intermédiaire de

$$G = \frac{C}{\cos i};$$

il y a extremum quand $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ (nœuds effectifs) et quand $\frac{d\varphi}{d\nu} = 0$.

Cette inégalité donne une indication sur l'oscillation de $\text{tang } i$ entre deux points stationnaires consécutifs; m^2 et M^2 étant petits comme ε , le rapport des deux valeurs stationnaires $\text{tang } i_1$, $\text{tang } i_2$ est un peu supérieur à 1 ⁽¹⁾.

Il n'y a pas à tenir compte, dans la pratique, de la variation de l'inclinaison qui est liée à la durée d'une révolution draconitique du corps céleste. En effet, l'équation différentielle

$$\frac{1}{\text{tang } i} \frac{d(\text{tang } i)}{d\theta} = W \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega),$$

dans laquelle le second membre est de l'ordre de ε , s'intègre, en première approximation, comme si ω était constant, et r et φ périodiques de période 2π . On a donc, *en négligeant ε^2* :

$\text{tang } i =$ fonction périodique de θ , de période 2π .

Il en résulte qu'après un nombre de révolutions pas trop grand l'inclinaison aura sensiblement la même valeur. Mais si l'on envisage un intervalle de temps comprenant un nombre considérable de révolutions du corps céleste, W ne se comporte plus comme une fonction à courte période; le déplacement combiné des nœuds et des apsides fait que la valeur moyenne $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W d\theta$, au lieu d'être sensiblement constante, varie de quantités appréciables ⁽²⁾ lorsque θ subit une forte augmentation. La variation correspondante de l'inclinaison est une inégalité séculaire, selon la terminologie classique; en réalité, elle se compose d'oscillations de longue durée qu'on peut considérer comme quasi-périodiques, en appliquant le principe de substitution d'une orbite absolue à l'orbite réelle. La superposition des oscillations de courte durée et de faible amplitude aux oscillations de longue durée et d'amplitude finie se traduit (n° 46) par une rela-

⁽¹⁾ Le rapport de deux valeurs stationnaires consécutives de $\text{tang } i$ étant fini, l'inclinaison ne peut devenir infiniment petite par rapport à sa valeur initiale qu'au bout d'un temps infiniment grand, ce qui confirme un résultat déjà obtenu.

⁽²⁾ A cause des termes en ε^2 de $\frac{d(\text{tang } i)}{d\theta}$, qui prennent une importance de plus en plus grande quand θ croît.

tion de la forme

$\text{tang } i = \text{agrégat de Gyldén, à deux fréquences,}$

mais les oscillations courtes, de l'ordre de ε , sont pratiquement inappréciables, tandis que les oscillations longues, de l'ordre de ε^2 , deviennent sensibles au bout d'un temps suffisamment long.

§6. Variation de la fonction S du Chapitre III. — La fonction S nous sera utile à propos du déplacement des apsides: sa variation trouve place ici, car elle est liée au déplacement de la ligne des nœuds et aux oscillations de l'inclinaison.

Reprenons l'équation de définition (62) :

$$S = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \sin^2 \varphi)}{\partial S},$$

et dérivons-en les deux membres par rapport à ν ; il vient :

$$\frac{dS}{d\nu} \left(1 - \frac{1}{G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \right) = \frac{1}{G^2} \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\nu} - \frac{2}{G^3} \frac{dG}{d\nu} \frac{\partial U}{\partial S},$$

d'où l'existence de points stationnaires de S :

1° Quand $\frac{dG}{d\nu} = 0$ avec $\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial \varphi} = 0$ (passages aux nœuds, inclinaison maxima);

2° Quand $\frac{dG}{d\nu} = 0$ avec $\frac{d\varphi}{d\nu} = 0$ (maxima et minima de φ , inclinaison minima).

Les expressions particulières de S du n° 26 montrent effectivement que cette fonction est extrema en même temps que l'inclinaison : il y a minimum quand $\varphi = 0$ (inclinaison maxima) et maximum quand φ est stationnaire (inclinaison minima).

Remarquons, au surplus, que la partie principale de S étant $\frac{\cos^2 i}{(1^2)}$, on peut négliger les oscillations de courte durée de S, tout comme celles de $\cos i$. La partie principale de S est donc assimilable à une constante pendant un intervalle de temps assez long, ainsi que nous l'avons indiqué au n° 25.

57. Expression de la vitesse angulaire de la ligne des nœuds dans quelques cas simples. -- Considérons une orbite très voisine d'un cercle ⁽¹⁾ de centre O, de rayon a et d'inclinaison différente de zéro. Nous nous trouverons dans ce cas, temporairement tout au moins, si l'orbite képlérienne osculatrice, à un instant donné, est circulaire ou presque circulaire.

La plupart des fonctions U considérées au n° 26 peuvent être réunies dans la formule

$$U = \frac{1}{r} + \varepsilon r^h (1 - \beta \sin^2 \varphi),$$

où h , ε , β ont des valeurs déterminées (h entier, ε petit, $\varepsilon \beta > 0$). En négligeant les quantités du second ordre de petitesse, la dérivée de U par rapport à $\sin^2 \varphi$ est constante; soit $-K$ sa valeur, qui est négative. La fonction L (n° 20) est sensiblement égale à

$$2 \frac{a^2}{G^2} \cos^2 i \frac{\partial U}{\partial (\sin^2 \varphi)} \quad \text{ou} \quad -2K \frac{a^2}{G^2} \cos^2 i.$$

La première équation (109) s'écrit alors

$$\frac{d\psi}{d\nu} = -2K \frac{a^2}{G^2} \cos^2 i \sin^2 (\nu - \psi).$$

K étant de l'ordre de ε , il est permis de considérer l'inclinaison comme constante, puisque la variation du produit $K \cos^2 i$ est comparable à ε^2 . Il en résulte, par une intégration facile

$$\tan(\nu - \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2K \frac{a^2}{G^2} \cos^2 i}} \tan \left[\sqrt{1 + 2K \frac{a^2}{G^2} \cos^2 i} (\nu - \nu_0) \right].$$

⁽¹⁾ Il est bien évident qu'il n'existe pas d'orbites de rayon constant en dehors des orbites circulaires du plan de l'équateur, car on devrait avoir, d'après (26) et (30):

$$s \frac{\partial U}{\partial s} = 1 (U + h),$$

pour une valeur déterminée de s et pour toutes les valeurs de $|\varphi|$ inférieures à une limite déterminée. Cette égalité est impossible si φ n'est pas constamment nul.

Le terme constant de $\frac{d\psi}{d\nu}$ est :

$$1 - \sqrt{1 + 2K \frac{a^2}{G^2} \cos^2 i}.$$

Son produit par $\frac{d\nu}{dt} = \frac{G}{a^2}$ représente le terme constant de $\frac{d\psi}{dt}$, c'est-à-dire le moyen mouvement du nœud dans le plan orbital ; pour passer au moyen mouvement dans le plan de l'équateur, il faut, d'après (1), diviser $\frac{d\psi}{dt}$ par $\cos i$. On a ainsi :

$$\text{moyen mouvement du nœud} = \frac{G}{a^2 \cos i} \left(1 - \sqrt{1 + 2K \frac{a^2}{G^2} \cos^2 i} \right),$$

ou, puisqu'on néglige K^2 :

$$\text{moyen mouvement du nœud} = - \frac{K}{G} \cos i.$$

Ce résultat donne lieu au théorème suivant :

Lorsqu'une planète gravite à une grande distance d'un corps central aplati, ou bien est troublée par une autre planète voisine du corps central, ou bien joue le rôle de cette planète, la vitesse angulaire moyenne de la ligne des nœuds de l'orbite supposée voisine d'un cercle de rayon donné décrit avec une vitesse angulaire adéquate est proportionnelle au cosinus de l'inclinaison.

Si l'on a affaire avec une orbite non plus voisine d'un cercle, mais d'excentricité quelconque, le moyen mouvement approché de la ligne des nœuds dans le plan orbital ou dans le plan de l'équateur s'obtient en remplaçant dans l'une ou l'autre des équations :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G}{r^2} L \sin^2(\nu - \psi).$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{\rho^2} W \sin^2(\theta - \omega),$$

le second membre par la valeur moyenne qu'il aurait si le mouvement était elliptique. Le procédé le plus simple consiste à calculer d'abord la valeur moyenne de $\frac{d\psi}{d\nu} = L \sin^2(\nu - \psi)$ relativement à ν ;

le produit de cette valeur moyenne par le moyen mouvement oscilateur n donne la valeur moyenne de $\frac{d\psi}{dt}$ avec une erreur relative de l'ordre de ε , c'est-à-dire avec une erreur absolue de l'ordre de ε^2 ; l'application de la formule (1) (i étant supposé constant) donne ensuite la valeur moyenne de $\frac{d\omega}{dt}$ avec une erreur du même ordre.

58. **Déplacement de la ligne des nœuds considéré comme fonction de l'inclinaison lorsque celle-ci est très faible.** — Fixons maintenant les valeurs de h , C , constantes des forces vives et des aires, et considérons les orbites situées dans le voisinage de la trajectoire périodique du plan de l'équateur. Le potentiel perturbateur est toujours supposé affecté du petit coefficient ε , mais cela ne serait pas indispensable.

L'équation différentielle la plus commode pour déterminer la latitude du point mobile est la deuxième équation (55)

$$\frac{d^2\mu}{dv^2} + (1 - L)\mu = 0,$$

dans laquelle

$$L = 2 \frac{r^2}{C^2} \cos^2 i \frac{dU}{d(\sin^2 \varphi)}.$$

Regardons-la comme une *équation aux variations*, en prenant comme instant initial celui du passage à un nœud et en remplaçant, dans L , le rayon vecteur par la fonction périodique de v qui correspond à l'orbite équatoriale issue de ce nœud; il faut faire aussi, dans la même fonction L , $i = \varphi = 0$.

Nous obtiendrons, de cette façon, la solution de départ ci-après :

$$\mu = \alpha_0 \left\{ \cos(bv + k) + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos[(b + pf)v + k] + \sum_{p=1}^{\infty} A_{-p} \cos[(b - pf)v + k] \right\},$$

dont les coefficients $A_{\pm p}$ et la fréquence b (voisine de 1) sont calculables par la méthode de Hill ⁽¹⁾; f désigne la fréquence du

⁽¹⁾ TISSERAND, *loc. cit.* La stabilité des solutions de l'équation aux variations est en rapport avec le fait que le mouvement périodique du plan de l'équateur

mouvement périodique du plan de l'équateur; α_0 et k , les constantes d'intégration. Nous mettrons cette solution sous la forme

$$\mu = (\mu_0 + \dots) \cos [(b\nu + k + \dots)],$$

de Gylden⁽¹⁾, puis, par une approximation progressive, à l'aide du changement de variables de Poincaré⁽²⁾, nous arriverons à présenter l'intégrale générale de l'équation en μ comme une série trigonométrique divergente dont les coefficients contiennent en facteurs les puissances successives de μ_0 :

$$\mu = \mu_0 \{ \cos [(b - \eta \sin^2 i_0 + \dots) \nu + k] + B_1 \mu_0^2 \cos [\dots] + \dots \},$$

(i_0 , inclinaison initiale). Nous n'avons pas écrit les termes dus à la variation sensiblement périodique du rayon vecteur, parce qu'ils sont sans importance à l'égard du moyen mouvement des nœuds. Il est à noter que la variable μ n'intervenant dans L que par son carré, les puissances paires de μ_0 sont seules présentes dans l'expression encadrée par les accolades; pour le même motif, les puissances paires de $\sin i_0$ figurent seules dans les coefficients de ν .

Ce développement formel de μ possède la propriété asymptotique des séries de Lindstedt. Si l'on n'envisage, par exemple, que le premier terme, on écrira :

$$(120) \quad \mu = \mu_0 \cos [(b - \eta \sin^2 i_0) \nu + k] + N \quad \text{avec} \quad N \leq A |\nu - \nu_0| \mu_0^3,$$

formule applicable dans un intervalle de valeurs de ν dont l'étendue est de l'ordre de $\frac{1}{\mu_0^2}$ (A est une constante de l'ordre de petitesse de ε). Quant à la fréquence de la fonction périodique

$$\cos[(b - \eta \sin^2 i_0) \nu + k],$$

elle est égale, en réalité, à

$$b - \eta \sin^2 i_0 + R \quad \text{avec} \quad R \leq B |\nu - \nu_0| \mu_0^3$$

est multiple. Il en est ainsi pour tout mouvement périodique $z = 0$ dans les champs de gravitation $V(x, y, z)$ tels que $\frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial z}$ soit négatif et borné, le domaine des états de mouvement ayant une étendue finie (Birkhoff).

(¹) Les quantités non explicitées, dans les parenthèses, sont des fonctions périodiques, de valeur moyenne nulle.

(²) *Méth. Nouv.*, t. I, p. 335-338.

(B, autre constante de l'ordre de ε); η est positif et contient ε en facteur.

Il résulte de la formule (120) que le déplacement du nœud, pendant une révolution draconitique, est sensiblement égal à

$$\delta\psi = 2\pi \left(\frac{1}{b - \eta \sin^2 i_0} - 1 \right).$$

Faisons croître l'inclinaison initiale depuis la valeur i_0 jusqu'à la valeur i_1 supposée du même ordre de petitesse que i_0 ; $|\delta\psi|$ subira une diminution représentée par :

$$- \frac{2\pi\eta}{b^2} (\sin^2 i_1 - \sin^2 i_0) + \text{termes d'ordre supérieur.}$$

On peut d'ailleurs supposer que i_1 , au lieu d'être supérieur à i_0 , lui est inférieur; la variation précédente est alors une augmentation.

Soit n le nombre de révolutions draconitiques nécessaires pour que l'inclinaison, par suite de ses oscillations de longue durée, passe de la valeur i_0 à la valeur i_1 ; on peut choisir i_1 dans l'ordre de petitesse fixé, et n assez grand pour que la somme des déplacements $|\delta\psi|$ de la ligne des nœuds au cours des n révolutions draconitiques soit inférieure d'une quantité plus grande qu'un nombre donné (2π , par exemple) à ce qu'elle serait si l'inclinaison restait constamment nulle. En effet, l'inclinaison, au cours des n révolutions draconitiques, reste de l'ordre de μ_0 pourvu que la variation correspondante de ν n'excède pas la limite de grandeur au delà de laquelle l'inégalité

$$N \leq A |\nu - \nu_0| \mu_0^3,$$

de la formule (120), cesse d'avoir son second membre d'ordre infinitésimal. Cela étant, l'ordre de grandeur maximum que nous pouvons assigner à $\nu - \nu_0$, et par suite à n , est celui de $\frac{1}{\mu_0^2}$ ⁽¹⁾; il en résulte, pour l'inclinaison, une variation totale de l'ordre de μ_0 , d'où, pour $\sin^2 i$, une variation de l'ordre de μ_0^2 . En désignant par

(1) Nous faisons abstraction de l'ordre de petitesse de la force perturbatrice, parce qu'il intervient de la même manière dans toutes les quantités variables que nous envisageons en ce moment.

I une certaine inclinaison intermédiaire (qui est, évidemment, de l'ordre de μ_0), la somme des déplacements de la ligne des nœuds au cours des n révolutions draconitiques diffèrera de la somme des mêmes déplacements dans le cas d'une inclinaison nulle de la quantité : $-\frac{2\pi n \tau_1}{b^2} \sin^2 I$. En conséquence, si l'on veut que cette différence surpasse 2π , il suffira de prendre pour n n'importe quel nombre entier supérieur à $\frac{b^2}{\tau_1 \sin^2 I}$ et du même ordre de grandeur que ce rapport. Le théorème est démontré.

Nous utiliserons les considérations de ce paragraphe dans le chapitre qui va suivre. Au point de vue des inégalités de la longitude du nœud et de l'inclinaison, le fait important est que, *pour les orbites très voisines du plan de l'équateur, le déplacement de la ligne des nœuds décroît quand l'inclinaison croît, la variation du déplacement des nœuds étant beaucoup plus rapide que celle de l'inclinaison.*

CHAPITRE VII.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES AU VOISINAGE DU PLAN DE L'ÉQUATEUR.

§9. Existence des mouvements périodiques. - Notre point de départ est la solution périodique du plan de l'équateur dans le champ dérivé de la fonction de forces $U(r, \sin^2 \varphi)$, pour des valeurs données convenables des constantes des forces vives et des aires. Les équations aux variations qu'on peut former par la méthode de Poincaré ayant leurs solutions stables (n° 38), le mouvement considéré est de type elliptique ⁽¹⁾; il existe donc, d'après un théorème connu de M. Birkhoff, une infinité d'autres mouvements périodiques de type elliptique formant, avec le premier, un ensemble dense sur lui-même. On peut même admettre la proposition très vraisemblable de Poincaré (n° 37), selon laquelle l'ensemble des mouvements périodiques, quand il existe, est dense

(1) Certains auteurs disent : *de type stable*, mais ce n'est qu'une stabilité de première approximation.

dans tout le domaine des états de mouvement. Tout ceci s'applique au problème du mouvement relatif, à deux degrés de liberté, dans le plan méridien; si l'on passe au mouvement dans l'espace, il suffira de donner à la constante des aires un accroissement inférieur à une limite arbitrairement petite pour que la solution correspondant à une solution périodique du plan méridien soit périodique elle aussi (*voir* n° 22).

Plaçons-nous maintenant dans un champ de forces de la forme $U(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta)$; l'absence de la symétrie de révolution autour de Oz est due (n° 13) à la présence d'un anneau elliptique de Gauss; e' étant l'excentricité de cet anneau et ε le coefficient du potentiel perturbateur, nous pouvons écrire :

$$U(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) = U_0(r, \sin^2 \varphi) + \varepsilon e' U_1(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta).$$

Si l'on fait jouer à $\varepsilon e'$ le rôle du paramètre μ des *Méthodes Nouvelles*, on obtiendra, à partir de chaque solution périodique (dans l'espace) du champ de forces $U_0(r, \sin^2 \varphi)$, de période T , une solution périodique du champ de forces $U(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta)$ de période peu différente de kT (k , entier arbitraire) ou de période égale à kT lorsque e' est assez petit (¹).

Enfin, dans la troisième catégorie de champs de gravitation envisagée au n° 13, qui comprend les potentiels dépendant périodiquement du temps, il existe des mouvements périodiques bien connus qui ont donné lieu, depuis les travaux de Hill et Poincaré, à de nombreuses études sur le problème restreint des trois corps et sur le problème astéroïdal.

Il est inutile d'insister sur des résultats classiques; nous porterons donc notre attention sur les solutions périodiques dans les champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur, solutions qu'on prolongera sans peine dans les champs de forces comportant des anneaux de Gauss elliptiques.

(60). Longueur des périodes. Solution exceptionnelle, à courte période, dans le champ d'attraction d'un amas stellaire. — Le

(¹) *Méth. Nouv.*, t. I, p. 84.

potentiel étant de la même forme que dans le chapitre précédent :

$$U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi),$$

la ligne des nœuds de l'orbite est animée d'un mouvement rétrograde, dont la vitesse moyenne est du même ordre que $\frac{\partial U}{\partial (\sin^2 \varphi)}$, c'est-à-dire de l'ordre de ε . Si le mouvement est périodique, la période, multiple de celle de la révolution des nœuds, est longue; elle croît quand ε décroît et tend vers l'infini pour $\varepsilon \rightarrow 0$. La période du mouvement relatif dans le plan méridien est longue elle aussi, même s'il y a seulement périodicité en (ρ, z) , ce qui est le cas général des solutions que nous appelons périodiques. Pour s'en rendre compte, il n'y a qu'à regarder chaque mouvement périodique dans le plan méridien comme un mouvement quasi-périodique dont les deux fréquences f_1, f_2 sont commensurables entre elles; le rapport de ces fréquences est le *rotation number* ν de la formule (101), qui est égal à l'unité augmentée ou diminuée d'une quantité de l'ordre de ε :

$$\nu = \frac{f_2}{f_1} = 1 + k\varepsilon.$$

Le mouvement étant périodique, sa fréquence est le plus grand commun diviseur de f_1 et f_2 , c'est-à-dire le plus grand commun diviseur de f_1 et $k\varepsilon f_1$ ($k\varepsilon$ est rationnel); on a donc comme fréquence un nombre de l'ordre de ε , d'où une période de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$, tendant vers l'infini quand ε tend vers zéro.

Lorsque le déplacement moyen des apsides a lieu dans le sens direct, le « rotation number » ν , qui représente le rapport du moyen mouvement draconitique du corps céleste à son moyen mouvement anomalistique, est supérieur à 1, et la constante k est positive. Mais si le déplacement moyen des apsides est rétrograde, la constante k peut devenir négative, ou, exceptionnellement, nulle.

Prenons, par exemple, le potentiel (72) :

$$U = \frac{1}{r} - r^2(\alpha + \beta \sin^2 \varphi) \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ positifs}),$$

qui sert à étudier le mouvement d'une étoile dans un amas globulaire. Nous avons :

$$W = \frac{r^2}{C^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -2 \frac{\beta r^4}{C^2} \cos^4 \varphi.$$

et, en posant $r = \frac{1}{s}$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = -\frac{6}{s^4} (\alpha + \beta \sin^2 \varphi) = -6r^4 (\alpha + \beta \sin^2 \varphi).$$

Le déplacement de la ligne des nœuds est défini par la deuxième équation différentielle (54), qui s'écrit :

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \left(1 + 2\beta \frac{r^4}{C^2} \cos^4 \varphi\right) w = 0.$$

De même que les passages aux nœuds correspondent aux zéros de w , les passages aux apsides correspondent aux zéros de $\frac{ds}{d\theta} = n$ (notation pour ce paragraphe seulement). Considérons une trajectoire d'inclinaison infiniment petite, que nous traiterons comme si elle était située dans le plan de l'équateur. Le mouvement de la ligne des apsides résulte de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 n}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right) n = 0,$$

obtenue par dérivation de (56). Par analogie avec l'équation en w , on voit que, $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ étant négatif, le déplacement des apsides a lieu dans le sens rétrograde. On a, d'ailleurs, pour la trajectoire en question :

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \left(1 + 2\beta \frac{r^4}{C^2}\right) w = 0$$

et

$$\frac{d^2 n}{d\theta^2} + \left(1 + 6\alpha \frac{r^4}{C^2}\right) n = 0,$$

d'où il résulte que si $\beta = 3\alpha$, les coefficients respectifs de w et n dans ces équations sont constamment égaux. On peut donc choisir les conditions initiales du mouvement de manière que les passages aux nœuds coïncident avec les passages aux apsides (on entendra par passages aux nœuds les zéros de l'intégrale générale de l'équa-

tion en ω , r étant remplacé, dans cette équation, par la fonction périodique de θ qui correspond au mouvement dans le plan de l'équateur). Le mouvement du point (ρ, z) , envisagé de cette façon, est périodique, avec une période courte; le *rotation number* ν est alors égal à 1.

Nous n'avons examiné que le cas où l'inclinaison est négligeable; on peut concevoir, par continuité, l'existence de mouvements périodiques à courte période sur des orbites d'inclinaison finie, mais cela n'enlève rien au caractère exceptionnel de ces solutions : elles ne peuvent exister que dans un amas stellaire ou corpusculaire d'aplatissement bien déterminé avec des conditions initiales très particulières.

61. Réduction des équations canoniques à la forme de M. Birkhoff. — Quand il y a stabilité au sens de Hill (n° 30), le mouvement périodique du plan de l'équateur existe toujours et s'obtient par deux quadratures (n° 22) ⁽¹⁾; soient :

$$\rho = \rho(t), \quad z = 0$$

ses équations. Nous considérerons les mouvements à deux degrés de liberté voisins de celui-là et admettant les mêmes valeurs que lui pour les constantes des forces vives et des aires. Il est commode d'introduire une variable angulaire λ , croissante avec le temps et choisie de manière que son augmentation pendant une période T de ce mouvement soit égale à 2π (par exemple $\lambda = \frac{2\pi}{T}t$); nous aurons alors :

$$\rho = \text{fonction périodique de } \lambda, \text{ de période } 2\pi,$$

pour le mouvement du plan de l'équateur, et nous pourrions encore adopter cette égalité, dans son voisinage, la variable ρ étant ainsi remplacée par la variable λ ⁽²⁾.

Les nouvelles coordonnées ou variables de position sont : λ, z ;

⁽¹⁾ Pratiquement des quadratures elliptiques, lorsque le potentiel peut être réduit aux formes simples du n° 26.

⁽²⁾ G.-D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems* (New-York, 1927), Chap. IV, § 1. Voir aussi le Chap. VI pour la démonstration de l'existence de mouvements périodiques au moyen des transformations de surfaces et le Chap. VIII pour l'étude générale des mouvements périodiques.

les variables conjuguées qui leur correspondent sont : $\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 \lambda', z'$, en désignant les dérivées par rapport au temps par des accents. La fonction hamiltonienne est :

$$\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + F(\rho, z) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 \lambda'^2 + z'^2 \right] + F(\rho[\lambda], z).$$

(Pour la signification de F , voir n° 30.) Posons :

$$p_1 = \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 \lambda', \quad q_1 = \lambda, \quad p_2 = z', \quad q_2 = z;$$

la fonction hamiltonienne s'écrit :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{p_1^2}{\left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2} + p_2^2 \right] + F.$$

Résolvons par rapport à p_1 l'équation :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{p_1^2}{\left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2} + p_2^2 \right] + F = h$$

des forces vives; les deux racines sont de signes contraires, et comme λ croît avec le temps, la racine positive est seule acceptable :

$$p_1 = + \sqrt{[2(F + h) - p_2^2]} \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2.$$

Admettons la notation :

$$H(q_1, p_2, q_2, h) = - \sqrt{[2(F + h) - p_2^2]} \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2;$$

H est une fonction réelle, analytique et uniforme de q_1, p_2, q_2, h ; elle est périodique en q_1 , de période 2π . Grâce à cette fonction, les équations du mouvement s'écrivent sous la forme simple :

$$\frac{dp_2}{dq_1} = - \frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial p_2},$$

qui n'est autre que la forme hamiltonienne pour un degré de liberté, l'angle q_1 remplaçant t comme variable indépendante.

Le temps s'introduit au moyen de la troisième équation

$$\frac{dt}{dq_1} = - \frac{\partial H}{\partial h}.$$

62. Transformation $\mathfrak{C}$ de la surface de section. — Étudions le système canonique ci-dessus, en remplaçant q_1 par λ et en supprimant les indices 2, afin de simplifier les notations

$$(121) \quad \begin{aligned} p_2 = p = z', \quad q_2 = q = z, \quad H = H(p, q, \lambda), \\ \frac{dp}{d\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned}$$

Nous avons toujours la solution $p = q = 0$, qui correspond au mouvement périodique $\rho = \rho(t)$, $z = 0$; les dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{\partial H}{\partial q}$ sont nulles en même temps que p et q .

Adjoignons aux équations (121) l'équation

$$\frac{dl}{d\lambda} = 1, \quad \text{d'où } l = \lambda, \text{ en annulant la constante d'intégration.}$$

Si l'on convient que λ représente le temps, le système ainsi formé définit le mouvement d'un fluide dont la vitesse a pour projection sur l'axe des l la constante 1; de plus, ce fluide est incompressible, puisque la divergence des seconds membres est nulle. Le domaine des états de mouvement est à trois dimensions, qui sont figurées par les coordonnées p, q, l . La quantité de fluide comprise dans un tube de courant entre les plans parallèles $l = 0$ et $l = 2\pi$ reste constante quand le temps varie, et tout gain infinitésimal de fluide à une base du tube est compensé par une perte égale à l'autre base; ce fait entraîne l'égalité des aires des deux bases. Pour l'exprimer d'une autre manière, disons que *la transformation $\mathfrak{C}$ qui fait correspondre au point $(p = P_0, q = Q_0, l = 0)$ d'une courbe intégrale du système (121) le point $(p = P_1, q = Q_1, l = 2\pi)$ de la même courbe est une transformation conservant les aires*. Dans notre problème, les coordonnées P_1, Q_1 s'expriment analytiquement en fonction de P_0, Q_0 et s'annulent avec ces dernières; quant à l , c'est une variable angulaire, et les surfaces de section $l = 0, l = 2\pi, \dots, l = 2k\pi, \dots$, des lignes de courant du fluide ne sont pas distinctes entre elles; elles se

réduisent à une seule, que chaque ligne de courant coupe une infinité de fois à des intervalles de temps équidistants les uns des autres de 2π . La transformation $\mathfrak{T}$ fait correspondre chaque point d'intersection au précédent; comme, au surplus, elle conserve les aires, c'est une *transformation de Poincaré-Birkhoff*.

63. Points invariants après un nombre suffisamment grand d'itérations de la transformation $\mathfrak{T}$. Mouvements périodiques multiples du mouvement $z=0$. — Pour qu'il existe une solution périodique du système (121), il faut et il suffit qu'on puisse trouver un nombre n tel que la transformation $\mathfrak{T}^n$ laisse invariant un point de la surface de section $l=0$. Soit γ l'angle polaire du point (p, q) ; $\tan \gamma = \frac{q}{p} = \frac{z}{z'}$; γ est sensiblement proportionnel, en moyenne, à λ , et l'on peut écrire, en s'inspirant de la formule (120)

$$(120') \quad \gamma = (d - z \sin^2 i_0) \lambda + \text{fonction de } p_0, q_0, \lambda.$$

(p_0, q_0) , valeurs initiales de p, q). La proportionnalité moyenne approchée de γ à λ a lieu dans un intervalle de valeurs de λ dont l'étendue est de l'ordre de $\frac{1}{p_0^2 + q_0^2}$, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{\sin^2 i_0}$. Nous avons vu (n° 58) que le déplacement moyen de la ligne des nœuds pendant une révolution draconitique décroît lorsqu'on fait croître l'inclinaison initiale, si celle-ci reste inférieure à une limite très faible. Or, il est équivalent de dire que l'inclinaison croît ou que $\sqrt{p^2 + q^2}$ augmente, quand ces deux quantités sont voisines de zéro. D'autre part, quand le déplacement des nœuds diminue, les intervalles des valeurs de la variable angulaire qui séparent les zéros et les points stationnaires de z subissent une augmentation, de sorte que la croissance de l'angle γ (fonction de λ) devient plus lente. Soit alors Γ la limite de l'accroissement de γ sous l'influence de la transformation $\mathfrak{T}^n$ appliquée au point (p, q) lorsque le mouvement tend vers celui qui est défini par $p = q = 0$; il est possible de déterminer l'entier n de manière que la transformation $\mathfrak{T}^n$ effectuée sur le point $(p = \alpha, q = \beta)$ (α et β constantes très petites) produise un accroissement de l'angle γ égal ou inférieur à $\Gamma - 2\pi$, l'ordre de grandeur

de $\sqrt{p^2 + q^2}$ étant d'ailleurs conservé par la transformation $\mathfrak{T}^n$. En effet, la formule (120') entraîne des conséquences analogues à celles de la formule (120) : *on satisfera aux conditions énoncées en prenant pour n n'importe quel nombre entier du deuxième ordre de grandeur en $\frac{1}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}$ et supérieur à $\frac{1}{\alpha \sin^2 I}$, I désignant une certaine inclinaison de l'ordre de i_0 . Il est visible, d'après cela, que n sera très grand, non seulement à cause de la petitesse de i_0 , mais encore à cause du diviseur α , qui est de l'ordre des masses perturbatrices.*

Faisons maintenant varier $\sqrt{p^2 + q^2}$ depuis la valeur zéro jusqu'à la valeur $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, et soit γ_n l'angle polaire du point (p_n, q_n) qui est l'homologue du point (p, q) dans la transformation $\mathfrak{T}^n$.

Pour $\sqrt{p^2 + q^2} = 0$, nous avons $\gamma_n - \gamma = \Gamma$.

Pour $\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, nous avons $\gamma_n - \gamma \leq \Gamma - 2\pi$.

Désignons par $2k\pi$ le plus grand multiple de 2π inférieur à Γ ; nous voyons que l'équation

$$\gamma_n - \gamma = 2k\pi$$

est satisfaite pour une seule valeur de $\sqrt{p^2 + q^2}$ comprise entre zéro et $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, c'est-à-dire pour un seul point (p_0, q_0) d'angle polaire égal à γ . Quand γ varie, le point (p_0, q_0) engendre une courbe analytique C_0 rencontrée une fois et une seule par chaque rayon vecteur.

Par l'effet de la transformation $\mathfrak{T}^n$, la courbe C_0 a pour image une courbe C_n qui coupe C_0 en deux points au moins, car si C_n était entièrement intérieure ou entièrement extérieure à C_0 , la transformation $\mathfrak{T}^n$ ne conserverait pas les aires. Or, l'un ou l'autre des points d'intersection, D , est l'homologue, dans $\mathfrak{T}^n$, d'un point D_0 situé comme lui sur la courbe C_0 , et, d'autre part, D et D_0 ont le même angle polaire, d'après la définition de C_0 ; donc D et D_0 coïncident, et D est invariant sous la transformation $\mathfrak{T}^n$.

Ainsi se trouve démontrée l'existence de deux points laissés invariants par la transformation $\mathfrak{T}^n$, lorsque l'entier n est suffisamment grand. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ étant donné, arbitrairement petit, la

limite inférieure de n en résulte. Il existe donc une infinité de solutions périodiques des équations du mouvement relatif dans le plan méridien, si l'on se borne au voisinage du mouvement $\rho = \rho(t)$, $z = 0$. *Les mouvements correspondants sont des multiples d'ordre élevé du mouvement dans le plan de l'équateur, c'est-à-dire que la période de chacun d'eux comprend un très grand nombre de circuits de ce dernier. Les deux points invariants de chaque transformation $\mathfrak{G}^n$ correspondent l'un à un mouvement périodique de type elliptique, l'autre à un mouvement périodique de type hyperbolique.* La période de l'un et de l'autre est d'autant plus longue que $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ est plus petit, et elle croît indéfiniment quand $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ tend vers zéro. Les solutions périodiques voisines de $\rho = \rho(t)$, $z = 0$, ne sont donc pas de la même espèce que cette dernière.

En faisant varier la constante des aires, on déduira des mouvements périodiques en (ρ, z) une infinité de mouvements périodiques en (ρ, θ, z) dans l'espace.

64. Mouvements limite-périodiques. — Appelons Σ_0 la solution périodique $\rho = \rho(t)$, $z = 0$, de période T . En partant de cette solution qui est à courte période et de type elliptique, nous avons obtenu une famille de solutions à longues périodes, mais dans laquelle il y a une solution de type hyperbolique pour une solution de type elliptique. Soit Σ_1 une solution de type elliptique de cette famille, ayant comme période $n_1 T$ (n_1 , entier dont la limite inférieure dépend de $\sqrt{z_0'^2 + z_0''^2}$). En changeant les variables de manière qu'une des coordonnées de position soit constamment nulle sur la trajectoire correspondant à Σ_1 , et en introduisant les séries formelles d'intégration dans lesquelles les exposants caractéristiques, débarrassés du coefficient imaginaire $\sqrt{-1}$, servent de fréquences à des termes périodiques, on découvre, dans le voisinage de Σ_1 , une famille de mouvements périodiques dont les uns sont elliptiques et les autres hyperboliques. A partir de l'un d'eux, Σ_2 , de type elliptique, et de période $n_2 n_1 T$ (n_2 entier), on obtient, de même, une famille voisine dans laquelle on peut choisir un mouvement Σ_3 , de période $n_3 n_2 n_1 T$ (n_3 entier), et de type elliptique, etc.

En restreignant suffisamment les voisinages successifs de $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, nous pouvons faire en sorte d'obtenir une suite de trajectoires fermées $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_r$, toutes de type elliptique, et telles que la courbe Σ_r admette une limite bien définie quand l'indice r croît indéfiniment. Avec les mêmes coordonnées p_1, q_1, p_2, q_2 qu'au n° 61, nous aurons comme équations du mouvement sur la courbe Σ_r

$$p_1 = f_r(q_1), \quad p_2 = g_r(q_1), \quad q_2 = h_r(q_1), \quad t = \int k_r(q_1) dq_1;$$

f_r, g_r, h_r, k_r , fonctions analytiques périodiques de q_1 , de période $2n_1 n_2 \dots n_r \pi$. Lorsque la courbe Σ_r tend vers sa limite, les fonctions périodiques f_r, g_r, h_r, k_r , dont la période croît indéfiniment, tendent d'une manière uniforme vers des fonctions limite-périodiques ⁽¹⁾.

Il y a une infinité de trajectoires telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_r$, sur lesquelles les coordonnées sont exprimables par des fonctions limite-périodiques. M. Birkhoff (ouvrage cité) a établi leur existence pour les systèmes canoniques généraux ayant deux degrés de liberté. Les mouvements sur ces trajectoires, mouvements qu'on peut qualifier de limite-périodiques, forment un échelon à part dans la hiérarchie du n° 48, si l'on veut les séparer des mouvements périodiques ordinaires. Les points de la surface de section qui correspondent à un mouvement limite-périodique (ces points constituent un ensemble infini dénombrable) ne font pas partie d'un ensemble fini invariant de courbes fermées, contrairement à ce qui se passe pour les autres catégories de mouvements récurrents. En effet, si ces points étaient situés sur n courbes fermées, chacune serait l'image de la précédente dans la transformation $\mathfrak{T}$. La transformation $\mathfrak{T}^n$ laissant alors chaque courbe invariante, la famille de mouvements récurrents associée à cette courbe serait caractérisée par un *rotation number* irrationnel; elle serait donc composée de mouvements quasi-périodiques par rapport à une

⁽¹⁾ Ainsi nommées par M. Harald Bohr. Une fonction limite-périodique est une fonction presque-périodique particulière, dont toutes les fréquences s'obtiennent en faisant les produits d'un nombre déterminé par des nombres rationnels.

variable angulaire bien choisie (n^{os} 40 et 44) et aucun mouvement d'une autre espèce n'y pourrait être inclus. De là découle l'impossibilité d'établir une correspondance entre les trajectoires limite-périodiques d'un système donné et les courbes « caractéristiques » définies, sur des tores, par des équations différentielles du type (81).

Il serait intéressant de faire la représentation concrète d'un mouvement limite-périodique, les fonctions de ce nom n'ayant reçu, jusqu'à présent, aucune application pratique.

CHAPITRE VIII.

EXCENTRICITÉ DES TRAJECTOIRES. VARIATION DES APSIDES.

65. Méthode pour l'étude des oscillations du rayon vecteur. — L'étude des trajectoires présentant la stabilité de Hill, dans les champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur, a été abordée au n^o 34 par la considération du grand axe, et continuée tout au long du Chapitre VI, où il a été question des nœuds et de l'inclinaison. Reste à nous occuper de l'excentricité et de la position de la ligne des apsides, éléments qui sont liés tous deux à la variation du rayon vecteur.

Reprenons la décomposition de s , inverse du rayon vecteur, au moyen de la formule (61)

$$s = S + \tau,$$

la fonction S étant définie par l'équation (62)

$$S = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \sin^2 \varphi)}{\partial S}.$$

Les oscillations de S sont de deux sortes (*voir* n^{os} 55 et 56) : celles de courte durée, dont l'amplitude est de l'ordre de ε (coefficient du potentiel perturbateur), et celles de longue durée qui produisent, pendant un petit nombre de révolutions du corps céleste, des variations de l'ordre de ε^2 , mais qui sont beaucoup plus importantes que les premières si l'on envisage un intervalle de temps très long. Quant aux oscillations de σ , leur amplitude,

relativement à S, est comparable à l'excentricité de l'orbite képlérienne osculatrice, du moins lorsque ε est petit vis-à-vis de cette excentricité.

Afin de mettre en évidence l'amplitude et la phase des oscillations de σ , appliquons à l'équation (66)

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu^2} + (1 - \Psi)\sigma = \Lambda,$$

la transformation (84) en (q, λ) , mais, au préalable, annulons la constante arbitraire γ , et faisons $q = \Pi$, $\lambda = \nu - \chi$. Les formules (84) deviennent, pour ce qui concerne σ ,

$$(122) \quad \sigma = \Pi \cos(\nu - \chi), \quad \frac{d\sigma}{d\nu} = -\Pi \sin(\nu - \chi),$$

et la transformation ainsi définie remplace l'équation (66) par deux équations différentielles du premier ordre

$$(123) \quad \begin{cases} \frac{d\chi}{d\nu} = \Psi \cos^2(\nu - \chi) + \frac{\Lambda}{\Pi} \cos(\nu - \chi), \\ \frac{1}{\Pi} \frac{d\Pi}{d\nu} = -\Psi \sin(\nu - \chi) \cos(\nu - \chi) - \frac{\Lambda}{\Pi} \sin(\nu - \chi). \end{cases}$$

Il est facile de voir que Π ne s'annule jamais, si l'on admet qu'aucun zéro de σ ne coïncide avec une apside. En effet, on tire de l'équation (65)

$$\sigma = \frac{-\frac{d^2s}{d\nu^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\nu} \frac{ds}{d\nu}}{1 - \Psi} = \frac{r^2}{(1 - \Psi)G^2} \frac{d^2r}{dt^2},$$

d'où il résulte que σ est positif, négatif ou nul en même temps que $\frac{d^2r}{dt^2}$. Or on a, d'après (23),

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{G^2}{r^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{G^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \varepsilon \frac{\partial \Omega(r, \sin^2 \varphi)}{\partial r},$$

en introduisant le potentiel perturbateur sous sa forme habituelle.

Considérons un zéro de $\frac{d^2r}{dt^2}$ compris entre deux apsides consécutives (voir n° 24), et désignons par r_0 , G_0 les valeurs correspondantes de r et G . La variation de G , pendant un petit nombre de révolutions, est de l'ordre de ε ; nous pouvons donc écrire, entre

nos deux apsides

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{G_0^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \varepsilon \mathcal{F} \left(r, \sin^2 \varphi, \left[\frac{d(\sin \varphi)}{dv} \right]^2 \right).$$

Prenons r comme variable indépendante, puisqu'elle croît ou décroît constamment d'une apside à la suivante; $\mathcal{F}$, fonction de r , $\sin^2 \varphi$, $\left[\frac{d(\sin \varphi)}{dv} \right]^2$, est remplacée par une certaine fonction $\mathcal{G}_f(r)$. Le développement de Taylor de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ au voisinage de la valeur $r = r_0$ est le suivant

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(-\frac{3G_0^2}{r_0^3} + \frac{2}{r_0^3} + \varepsilon \frac{d\mathcal{G}_f}{dr_0} \right) \Delta r + \dots$$

dans lequel la valeur approchée du coefficient de Δr est $-\frac{1}{G_0^3}$, obtenue en remplaçant r par G_0^2 . Il s'ensuit que la dérivée de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ par rapport à r est négative pour $r = r_0$, et que la dérivée de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ par rapport à v , pour la valeur correspondante de cette variable, est négative si r croît, ou positive si r décroît. En conséquence, la dérivée de σ par rapport à v , qui est égale à $\frac{r^2}{(1-\Psi)G^2} \frac{d}{dv} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)$ lorsque $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$, n'est jamais nulle en même temps que σ . moyennant l'hypothèse admise: donc la quantité $\sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{dv} \right)^2$, qui est égale à Π^2 , n'est jamais nulle, et Π est susceptible de deux déterminations, l'une positive, l'autre négative. Nous prendrons

$$(124) \quad \Pi = + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{dv} \right)^2}.$$

Examinons maintenant le cas où un zéro de σ , c'est-à-dire un zéro de $\frac{d^2 r}{dt^2}$, coïncide avec une apside. En cette apside, $\frac{d^2 r}{dt^2}$ s'annule sans changer de signe, de sorte qu'on a simultanément $\frac{dr}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^3 r}{dt^3} = 0$. Les constantes des forces vives et des aires étant données, il n'y a, pour remplir ces conditions, que des trajectoires exceptionnelles, dont les orbites képlériennes osculatoires, en des apsides de l'espèce envisagée, sont très peu diffé-

rentes de circonférences de centre O. En même temps que $\frac{d^2 r}{dt^2}$, l'expression $\frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv}$ s'annule sans changer de signe, et cela indique que son deuxième terme $\frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{ds}{dv}$ est stationnaire puisque son premier terme l'est; donc G est stationnaire; donc l'apside en question coïncide avec un nœud, ou avec un maximum de $\sin^2 \varphi$ (voir n° 55) ⁽¹⁾. Si l'apside coïncide avec un nœud, l'instant du passage étant t_0 , le rayon vecteur prend la même valeur aux instants $t_0 + T$ et $t_0 - T$, la latitude prend, à ces deux instants, des valeurs opposées, et la longitude prend des valeurs équidistantes de la longitude à l'instant t_0 . Si l'apside coïncide avec un maximum de $\sin^2 \varphi$, maximum ayant lieu à l'instant t_0 , on a les mêmes propriétés, excepté pour la latitude, qui prend les mêmes valeurs aux instants équidistants de t_0 . Dans chacun de ces deux cas, σ s'annule, pour $t = t_0$, sans changer de signe, et $\frac{d\sigma}{dv}$ en changeant de signe; la fonction $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dv} = \tan(\nu - \chi)$ est infinie, d'où $\cos(\nu - \chi) = 0$; il en résulte que Π s'annule en changeant de signe, sans quoi $\frac{d\sigma}{dv}$ ne changerait pas de signe, mais étant donnée la symétrie du mouvement par rapport à l'instant t_0 , il suffira d'en faire l'étude pour $t < t_0$ ou pour $t > t_0$ suivant que Π est positif avant ou après l'instant t_0 .

Il y a lieu de se demander comment se comporte Π lorsque t tend vers $\pm \infty$. L'allure de Π est évidemment liée à celle de σ , et par là à celle de $\frac{d^2 r}{dt^2}$. Or $\frac{d^2 r}{dt^2}$ est une fonction multioscillante qui n'admet aucune limite pour $t \rightarrow \pm \infty$ (n° 33); donc Π oscille perpétuellement et ne peut pas tendre vers zéro quand le temps croît indéfiniment.

Quant à la deuxième fonction introduite par la décomposition de σ , la fonction χ , on peut la regarder, quand Π n'est pas très petit, comme croissante, en moyenne, avec ν , si Ψ est toujours positif, et comme décroissante, en moyenne, si Ψ reste négatif (le

⁽¹⁾ En prenant l'apside singulière comme origine de la trajectoire, on voit sans difficulté que les points-origines de ces trajectoires exceptionnelles ne peuvent être, dans chaque plan méridien, qu'en nombre fini.

signe de Ψ est constant dans les applications les plus fréquentes). La dérivée $\frac{d\chi}{d\nu}$ a toujours une valeur finie, même dans le cas où Π s'annule en une apside, car le rapport $\frac{\cos(\nu - \chi)}{\Pi}$, qui figure dans son expression (123), ne cesse pas d'être fini.

66. Application aux mouvements quasi-périodiques. Excentricité moyenne d'une orbite absolue. — Dans le champ de forces $U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi)$, considérons une orbite absolue quasi-périodique; σ et $\frac{d\sigma}{d\nu}$ sont alors des fonctions quasi-périodiques de ν . θ ou t et s'expriment relativement à chacune de ces variables par des agrégats de Gylden possédant deux fréquences fondamentales (voir nos 45 et 46). Les fonctions Π , $\sin(\nu - \chi)$, $\cos(\nu - \chi)$, introduites par la transformation (122), sont des fonctions quasi-périodiques de même espèce que σ et $\frac{d\sigma}{d\nu}$, car on a successivement

$$\Pi^2 = \sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{d\nu} \right)^2,$$

$$\cos(\nu - \chi) = \frac{\sigma}{\Pi}, \quad \sin(\nu - \chi) = - \frac{1}{\Pi} \frac{d\sigma}{d\nu}.$$

Les mêmes propriétés appartiennent encore à la fonction $\frac{d\chi}{d\nu}$, définie par la première équation (123); en effet, dans le second membre de cette équation, Ψ et Λ sont des fonctions de σ , $\frac{d\sigma}{d\nu}$, μ , $\frac{d\mu}{d\nu}$ (n° 36) qui sont bornées, donc quasi-périodiques, et le membre envisagé, étant borné, est quasi-périodique.

Soit q la valeur moyenne de la fonction $\frac{d\chi}{d\nu}$ considérée comme fonction quasi-périodique de ν . Les fonctions $\sin(\nu - \chi)$, $\cos(\nu - \chi)$ étant regardées, elles aussi, comme fonctions de ν , on peut faire, au sujet des presque-périodes communes à ces deux fonctions relativement à tout nombre inférieur à 1, un raisonnement identique à celui du n° 53; on arrive ainsi à établir la formule

$$(125) \quad \chi = q\nu + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences,}$$

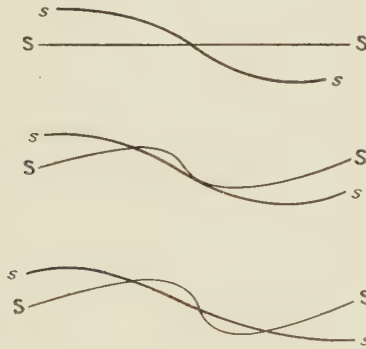
qui est le pendant de la formule (116). On a ensuite, en utilisant (107),

$$(126) \quad \chi = qgt + \text{agrégat de Gyldén, à deux fréquences,}$$

relation analogue à (117).

Quelle signification géométrique doit-on attribuer à la variable angulaire χ ? Pour répondre à cette question, écartons les trajectoires singulières sur lesquelles Π s'annule, et faisons varier, par la pensée, les conditions initiales du mouvement pour les amener à être celles d'un mouvement périodique du plan de l'équateur⁽¹⁾. Lorsqu'il en est ainsi, la fonction S , de la formule $s = S + \sigma$, est constante, et les apsides de la trajectoire correspondent aux

Fig. 3.



valeurs stationnaires de σ , qui sont alternativement positives et négatives d'après l'équation (60); entre deux apsides consécutives se trouve un zéro de σ et un seul. Si nous revenons à la trajectoire primitive par la variation inverse, nous aurons encore un seul zéro de σ entre deux apsides consécutives quelconques; en effet, s'il y avait plus d'un zéro, il y en aurait au moins trois puisque σ change de signe d'une apside à la suivante; donc, au cours de la déformation de la trajectoire, la courbe de variation de la fonction S , qui présente d'abord un seul point d'intersection avec celle de la fonction s , entre deux apsides consécutives,

(¹) Dans cette déformation de la trajectoire, les constantes des forces vives et des aires conservent leurs valeurs.

deviendrait tangente à cette dernière en un autre point compris entre les deux apsides, puis, la déformation continuant, le nombre de points d'intersection serait égal à trois. Or, il est impossible que les deux courbes soient tangentes, car on aurait, au point de contact $\sigma = 0$ et $\frac{d\sigma}{dv} = 0$, d'où $\Pi^2 = \sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2 = 0$, éventualité que nous avons rejetée; le point de contact coïnciderait, d'ailleurs, obligatoirement, avec une apside. *Il n'y a donc qu'un seul zéro de σ compris entre deux apsides consécutives, et ce théorème s'applique à n'importe quelle orbite, récurrente ou non récurrente, pourvu que sur cette orbite la fonction Π ne s'annule pas.*

Revenons aux trajectoires quasi-périodiques; nous avons

$$\nu - \chi = (1 - q)\nu + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences.}$$

Il y a autant d'apsides que de zéros de σ , et ces derniers ont lieu lorsque $\nu - \chi$ est égal à un multiple de π augmenté de $\frac{\pi}{2}$; le coefficient q joue donc le même rôle par rapport au périastre et à l'apostre que le coefficient $-l$ de la formule (116) par rapport au nœud ascendant et au nœud descendant. *Le produit qg , coefficient de t dans la formule (126), n'est pas autre chose que le moyen mouvement de la ligne des apsides. L'angle χ croît, en moyenne, proportionnellement au temps, avec la même vitesse moyenne que la longitude orbitale du périastre; nous dirons, en adoptant la terminologie de Gylden, que χ est un argument « isocinétique » ⁽¹⁾ avec la longitude orbitale du périastre.*

Les formules (125) et (126) s'appliquent, bien entendu, d'une manière approchée, aux orbites de type quelconque qu'on assimile, pendant un temps qui peut être très long, à des orbites quasi-périodiques.

La fonction Π est susceptible, tout comme l'angle χ , d'une

⁽¹⁾ Deux arguments peuvent être dits *isocinétiques* lorsque leur différence est une fonction presque-périodique.

interprétation géométrique. Écrivons, en effet

$$(127) \quad r = \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{S}}{1 + \frac{\Pi}{S} \cos(\nu - \chi)}.$$

Les oscillations de S étant de l'ordre de ε , et χ étant isocinétique avec la longitude du périastre, l'équation ci-dessus fait songer à celle d'une ellipse képlérienne dont l'excentricité serait $\frac{\Pi}{S}$. Or, en désignant par e l'excentricité de l'ellipse osculatrice et par p son paramètre, nous avons, comme il est bien connu,

$$e = p \sqrt{\left(s - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{ds}{d\nu}\right)^2},$$

et si nous négligeons les quantités de l'ordre de ε , nous pouvons remplacer, dans cette relation, p par $\frac{1}{S}$ et $\frac{ds}{d\nu}$ par $\frac{d\sigma}{d\nu}$. Il vient ainsi

$$e = \frac{1}{S} \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{d\nu}\right)^2} = \frac{\Pi}{S} \quad (\text{à des termes près en } \varepsilon).$$

Le rapport $\frac{\Pi}{S}$ définit donc l'excentricité osculatrice, lorsque celle-ci est plus importante que les quantités de l'ordre de ε . Il vaut mieux, d'ailleurs, dans un intervalle de temps déterminé et pas trop long, prendre une valeur unique de $\frac{\Pi}{S}$ plutôt que sa valeur à chaque instant, car $\frac{\Pi}{S}$ ne s'écarte de sa valeur à un instant donné que de quantités de l'ordre de ε , si l'on fait abstraction de ses oscillations de longue durée (cf. n° 55).

Considérons le seul cas des trajectoires quasi-périodiques, puisqu'elles constituent une représentation approximative temporaire de toutes les autres trajectoires. Un fait certain est que Π ne s'annule jamais sur une trajectoire récurrente. En effet, si Π s'annulait en un instant t_0 , ce serait en changeant de signe, et le mouvement posséderait, comme on l'a vu, une symétrie déterminée par rapport à l'instant t_0 . La valeur moyenne de la fonction Π serait donc nulle. Mais Π est une fonction quasi-périodique de la longitude et du temps, ou tout au moins d'une variable angulaire

bien choisie (n° 48); et comme toute fonction quasi-périodique passe une infinité de fois par sa valeur moyenne, Π s'annulerait une infinité de fois au cours du mouvement, ce qui est impossible. Par conséquent, sur une orbite absolue, la fonction Π est toujours positive.

L'excentricité moyenne d'une orbite absolue est représentée, à des quantités près en ε , par la valeur moyenne du rapport $\frac{\Pi}{S}$ qui est lui aussi une fonction quasi-périodique de la longitude et du temps (¹), ou simplement d'une variable angulaire en relation avec la surface de section choisie (n° 39).

Pour une orbite générale, non récurrente, il est illusoire d'envisager la valeur moyenne du rapport $\frac{\Pi}{S}$ (ou $\frac{\Pi}{S}$ lorsqu'il arrive que Π s'annule). S'il y a transitivité forte (les constantes des forces vives et des aires étant données), cette valeur moyenne est probablement constante, indépendante de l'orbite; en tout cas, elle paraît inaccessible à l'expérience, de même que le moyen mouvement sidéral, le moyen mouvement des nœuds et le moyen mouvement des apsides considérés dans leur sens strict, lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$ (n° 54).

67. Cas des orbites périodiques du plan de l'équateur. — Lorsqu'il s'agit des mouvements du plan de l'équateur, la transformation (122) remplace l'équation différentielle (60) par le système très simple

$$(128) \quad \begin{cases} \frac{d\chi}{d\theta} = \Psi \cos^2(\theta - \chi), \\ \frac{1}{\Pi} \frac{d\Pi}{d\theta} = -\Psi \sin(\theta - \chi) \cos(\theta - \chi), \end{cases}$$

dont l'étude serait analogue à celle des systèmes (109) et (111) si les orbites ne présentaient pas la particularité supplémentaire

(¹) Dans le langage de Gylden, la valeur moyenne de la fonction $\frac{\Pi}{S}$ ne serait pas appelée excentricité, mais « coefficient diastématique ».

d'être périodiques (n° 22); nous pouvons donc écrire

$$\chi = q\theta + \text{fonction périodique de } \theta, \text{ de période } \frac{2\pi}{1-q},$$

$$\Pi = \text{fonction périodique de } \theta, \text{ positive, de période } \frac{2\pi}{1-q}.$$

χ n'est pas seulement un argument isocinétique avec la longitude du périastre : en choisissant convenablement la constante arbitraire dont il dépend, on peut faire en sorte que la longitude du périastre soit réellement égale à χ toutes les fois que le mobile passe à un périastre. Le moyen mouvement de la ligne des apsides est évidemment égal au produit de q par la valeur moyenne de $\frac{d\theta}{dt}$, qui a été désignée par j . Les fonctions $\chi - qjt$, et Π , sont des fonctions périodiques du temps, ayant comme période $\frac{2\pi}{j(1-q)}$. Si l'on met l'équation de l'orbite sous la forme (127), S est constant, et les oscillations périodiques de χ sont de l'ordre de ε , qui figure comme coefficient dans Ψ ; le rapport $\frac{\Pi}{S}$ représente donc, à des quantités près de l'ordre de ε , l'excentricité de l'orbite képlérienne osculatrice. Les points stationnaires de Π coïncident avec les zéros de $\sin(\theta - \chi)$ et de $\cos(\theta - \chi)$, d'où il résulte qu'en chaque apside Π et $\cos(\theta - \chi)$ sont tous deux stationnaires; on en déduit que les passages aux apsides rendent Π maximum lorsque la fonction Ψ est toujours positive, ou minimum lorsque cette fonction est constamment négative.

C'est d'ailleurs le signe de Ψ qui fixe le sens du déplacement de la ligne des apsides, comme l'indique la première équation (128); *le périastre et l'apoastre se déplacent dans le sens direct quand la fonction Ψ est positive, dans le sens rétrograde quand elle est négative.* Mais le signe de Ψ est le même que celui de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ quand ce dernier est constant; il convient donc d'examiner, avant tout, cette dérivée (elle s'écrit ici $\frac{d^2 U}{ds^2}$).

Les équations (32) — (33), de Laplace-Poisson, donnent, pour $\varphi = 0$

$$(129) \quad \frac{d^2 U}{ds^2} + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} + \frac{4\pi f\delta}{s^4} = 0,$$

et l'on a, d'après (42),

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0} < 0.$$

Par suite, *si la trajectoire est extérieure aux masses attirantes*, δ étant nul, $\frac{d^2 \mathbf{U}}{ds^2}$ est forcément positif ⁽¹⁾, et le déplacement des apsides est direct. Si, au contraire, la trajectoire est intérieure à une masse attirante, la forme de l'équation précédente ne s'oppose pas à des valeurs négatives de $\frac{d^2 \mathbf{U}}{ds^2}$. Remarquons d'ailleurs que la fonction $\frac{d\mathbf{U}}{ds}$ est positive à l'infini ($s = 0$) et nulle à l'origine ($s = +\infty$); elle est croissante en dehors des masses; il faut donc que lorsqu'on traverse un des corps attirants, en se rapprochant de l'origine, cette fonction passe d'une valeur positive à une valeur négative ou nulle. Cela exige qu'elle soit décroissante dans un certain intervalle de valeurs de s , pour lesquelles on a évidemment $\frac{d^2 \mathbf{U}}{ds^2} < 0$, et toute trajectoire située dans la zone correspondante a ses apsides animées d'un mouvement rétrograde.

Considérons maintenant, parmi les orbites périodiques du plan de l'équateur, celles qui sont voisines d'une circonférence de centre O. En désignant par $\frac{1}{a}$ la valeur constante de la fonction S, nous avons

$$s = \frac{1}{a} + \Pi \cos(\theta - \chi),$$

et

$$r = \frac{1}{s} = a[1 - a\Pi \cos(\theta - \chi) + a^2\Pi^2 \cos^2(\theta - \chi) - \dots],$$

les coefficients $a\Pi$, $a^2\Pi^2$, ... étant du même ordre que les puissances successives de l'excentricité. La fonction $\Psi(s)$ admet un développement de la forme

$$\Psi(s) = \Psi\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{d\Psi\left(\frac{1}{a}\right)}{d\left(\frac{1}{a}\right)} \Pi \cos(\theta - \chi) + \frac{1}{2} \frac{d^2\Psi\left(\frac{1}{a}\right)}{d\left(\frac{1}{a}\right)^2} \Pi^2 \cos^2(\theta - \chi) + \dots$$

(1) Ce résultat a déjà été donné au n° 27.

Prenons comme ordre de grandeur de l'excentricité : $\sqrt{\varepsilon}$, ce qui n'empêchera pas le calcul de s'appliquer à des excentricités d'ordre plus faible ⁽¹⁾. La fonction Ψ et ses dérivées contiennent ε en facteur; si nous convenons de négliger ε^2 , ainsi que nous l'avons fait dans plusieurs calculs antérieurs, nous n'avons à conserver que les deux premiers termes du développement de $\Psi(s)$; l'équation (60), qui est le point de départ de l'étude du déplacement des apsides, s'écrit alors

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \left[1 - \Psi\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{d\Psi\left(\frac{1}{a}\right)}{d\left(\frac{1}{a}\right)} \cos(\theta - \chi) \right] \sigma = 0;$$

elle appartient au type des équations différentielles dont Hill a eu à s'occuper à propos des mouvements du nœud et du périée de la Lune

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} + [1 - k\varepsilon - \varepsilon F(\theta)]f = 0;$$

$F(\theta)$, fonction périodique de θ . Il est bien connu que la présence du terme périodique $\varepsilon F(\theta)$ dans le coefficient de f donne lieu à des inégalités dont la partie séculaire est du second ordre en ε , c'est-à-dire négligeable. Ayant en vue le moyen mouvement du périastre, nous réduirons donc les équations (60) et (128) à

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \left[1 - \Psi\left(\frac{1}{a}\right) \right] \sigma &= 0, \\ \frac{d\chi}{d\theta} &= \Psi\left(\frac{1}{a}\right) \cos^2(\theta - \chi). \end{aligned}$$

Remarquons, en nous reportant au n° 23, que $\Psi\left(\frac{1}{a}\right)$ n'est autre que la valeur de $\frac{1}{C^2} \frac{d^2U}{ds^2}$ pour $s = \frac{1}{a}$; nous en déduisons, au moyen de l'équation (129),

$$\Psi\left(\frac{1}{a}\right) = A - \frac{1}{4\pi} f \delta \frac{a^4}{C^2},$$

⁽¹⁾ La même hypothèse a été faite, au n° 52, pour les inclinaisons des orbites presque circulaires situées dans le voisinage du plan de l'équateur.

en adoptant la notation

$$\frac{a^2}{C^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} = -\Lambda \quad (\Lambda > 0),$$

introduite au n° 52. De cette manière, les solutions des équations différentielles précédentes s'écrivent

$$\sigma = \sigma_0 \cos \left[\sqrt{1 - \Lambda + 4\pi f \delta \frac{a^4}{C^2}} (\theta - \theta_0) \right],$$

dont il n'y a à retenir que la période, et

$$\tan(\theta - \chi) = \sqrt{1 - \Lambda + 4\pi f \delta \frac{a^4}{C^2}} \tan \left[\sqrt{1 - \Lambda + 4\pi f \delta \frac{a^4}{C^2}} (\theta - \theta_0) \right].$$

Cette dernière formule est rigoureusement vraie dans le cas limite d'une orbite circulaire; elle se met sous la forme

$$\chi = \left(1 - \sqrt{1 - \Lambda + 4\pi f \delta \frac{a^4}{C^2}} \right) \theta + \text{fonction périodique, bornée,}$$

qui devient, en introduisant le temps

$$(130) \quad \chi = \frac{C}{a^2} \left(1 - \sqrt{1 - \Lambda + 4\pi f \delta \frac{a^4}{C^2}} \right) t \\ + \text{fonction de } t, \text{ périodique et bornée.}$$

Le coefficient de t représente la limite vers laquelle le moyen mouvement du périastre tend uniformément lorsque le rayon vecteur de l'orbite tend vers la valeur constante a ⁽¹⁾. Quand le rayon vecteur reste voisin de a , la formule (130) s'applique encore, d'une manière approchée; l'erreur commise sur le moyen mouvement du périastre est au plus de l'ordre de ε^2 si l'excentricité ne surpasse pas l'ordre de grandeur de $\sqrt{\varepsilon}$.

La formule (130) est à rapprocher de la formule (113), qui

(1) L'excentricité $\frac{\Pi}{S}$ est nulle pour $r = \text{const} = a$, mais pas l'excentricité e de l'orbite osculatrice. Nous avons dit que la différence entre cette dernière et $\frac{\Pi}{S}$ est de l'ordre de ε ; le potentiel perturbateur étant $\varepsilon \Omega(s, \sin^2 \varphi)$, un calcul simple conduit à la formule

$$e = \pm \varepsilon \left[\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right]_{s=\frac{1}{a}, \varphi=0}.$$

donne le moyen mouvement des nœuds lorsque l'inclinaison tend vers zéro. Pour les applications pratiques, on posera

$$\frac{C}{a^2} = n,$$

d'où

$$\Lambda = \frac{1}{n^2} \times \text{fonction de } a;$$

les moyens mouvements des nœuds et des apsides seront ainsi exprimés par rapport à a et n . Mais on ne connaît pas, en général, a et n ; on connaît seulement ⁽¹⁾ le demi-grand axe de l'orbite osculatrice et le moyen mouvement osculateur. Cela importe peu, on aura une approximation suffisante en remplaçant, dans les formules (113) et (130), les constantes a et n par les éléments elliptiques osculateurs; les moyens mouvements des nœuds et des apsides comportent alors des erreurs *relatives* de l'ordre de l'excentricité osculatrice et du carré de l'inclinaison, comme l'a montré M. Chazy ⁽²⁾.

Soit une orbite voisine d'un cercle de centre O et d'inclinaison très petite. Supposons que l'ordre de grandeur de l'inclinaison soit celui de $\sqrt{\varepsilon}$, mais les considérations ci-après sont applicables aux inclinaisons plus faibles. Par contre, l'orbite n'étant pas située dans le plan de l'équateur, nous devons, pour éviter des complications dans le déplacement des apsides ⁽³⁾, prendre l'ordre de grandeur de l'excentricité plus important que celui de ε ; tenons-nous donc strictement aux excentricités de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$. En n'envisageant que des *orbites extérieures aux masses*, nous avons, comme moyen mouvement du périastre

$$\chi'_m = \frac{C}{a^2} (1 - \sqrt{1 - \Lambda}) = \frac{C}{a^2} \left(\frac{\Lambda}{2} + \text{termes de l'ordre de } \varepsilon^2 \right),$$

et comme moyen mouvement du nœud

$$\omega'_m = \frac{C}{a^2} (1 + \sqrt{1 + \Lambda}) = \frac{C}{a^2} \left(-\frac{\Lambda}{2} + \text{termes de l'ordre de } \varepsilon^2 \right).$$

⁽¹⁾ D'après les *Annuaire*s et *Éphémérides*.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, t. 203, 1936, p. 707, p. 844 et p. 981.

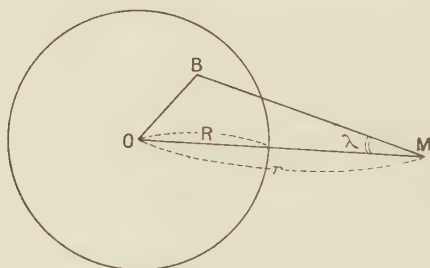
⁽³⁾ Voir plus loin, n° 69.

Continuant à négliger ε^2 , nous pouvons écrire

$$(131) \quad \chi'_m + \omega'_m = 0 \quad (\chi'_m > 0, \omega'_m < 0).$$

C'est la formule de M. Chazy ⁽¹⁾, dont on trouve des vérifications très satisfaisantes à propos des grosses planètes du système solaire ⁽²⁾. Dans les cas où elle est en défaut, l'excentricité de la planète troublée se trouve être inférieure à celle de la planète troublante, et c'est le moyen mouvement du périhélie qui n'a pas la valeur prévue; nous en montrerons la raison dans le prochain chapitre.

68. Influence de l'anneau de Saturne sur le déplacement des apsides de ses corpuscules. — Traitons un exemple où le point mobile est intérieur à une masse attirante: le mouvement d'un corpuscule de l'anneau de Saturne. Il est commode, comme l'a fait Tisserand, d'assimiler l'anneau de Saturne à un corps solide homogène compris entre deux cylindres circulaires droits d'axe Oz , de plan équatorial xOy , de rayons respectifs p, q ($p < q$), de hauteur $2b$, b étant très petit: chacun des corpuscules qui constituent l'anneau



sera supposé avoir son centre de gravité dans le plan équatorial.

Exprimons, pour commencer, l'attraction d'un cylindre circulaire droit homogène, de densité δ , de rayon R , de hauteur $2b$ et de plan équatorial xOy , sur un point situé dans ce plan, à la

⁽¹⁾ J. CHAZY, *La Théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste* (déjà cité), t. 1, p. 198.

⁽²⁾ L'application des formules (113) et (130) aux perturbations planétaires suppose, bien entendu, qu'on néglige, chaque fois, l'excentricité de la planète troublante.

distance r du centre O . Soit B un point quelconque intérieur au cylindre et dans le plan xOy , M le point attiré, u la distance MB , λ l'angle OMB . L'attraction est évidemment portée par MO ; désignons par $D_{r,R}$ sa mesure algébrique, négative, sur l'axe orienté OM . Nous avons (¹)

$$D_{r,R} = -f\delta \iiint \frac{u^2 \cos \lambda \, du \, d\lambda \, dz}{(u^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -2f\delta b \iint \frac{\cos \lambda \, du \, d\lambda}{\sqrt{u^2 + b^2}}.$$

On peut intégrer relativement à λ , en remarquant que si M est extérieur au cylindre, les limites de λ correspondant à chaque valeur de u sont $\pm \arccos \frac{r^2 + u^2 - R^2}{2ru}$, ce qui donne

$$(132) \quad D_{r,R} = -\frac{2f\delta b}{r} \int_{r-R}^{r+R} \sqrt{-u^4 - r^4 - R^4 + 2r^2 u^2 + 2R^2 u^2 + 2r^2 R^2} \\ \times \frac{du}{u \sqrt{u^2 + b^2}}.$$

Si M est intérieur au cylindre, la portion de ce dernier telle que u soit inférieur à $R - r$ produit une attraction nulle; pour la portion restante, on a encore comme valeurs extrêmes de λ , quand u est donné, $\pm \arccos \frac{r^2 + u^2 - R^2}{2ru}$, d'où la formule

$$D_{r,R} = -\frac{2f\delta b}{r} \int_{R-r}^{r+R} K(u) \, du,$$

$K(u)$ désignant la fonction placée sous le signe « somme » dans (132); comme c'est une fonction impaire de u , on peut ajouter à l'intégrale précédente la quantité nulle

$$-\frac{2f\delta b}{r} \int_{r-R}^{R-r} K(u) \, du;$$

on voit ainsi que la formule (132) convient tout aussi bien pour un point intérieur au cylindre que pour un point extérieur. Lorsque le point attiré est sur la surface du cylindre, on peut réduire l'attraction à la valeur approchée suivante, obtenue au

(¹) Nous attribuons toujours au point attiré la masse 1 (voir n° 4).

moyen des développements des intégrales elliptiques de Legendre

$$D_{R,R} = 4f\delta b \left(1 - \log \frac{8R}{b} \right).$$

Soit $U(r)$ le potentiel exercé par l'anneau de Saturne sur le centre de gravité d'un de ses corpuscules situé à la distance r du centre; l'attraction correspondante est $\frac{dU}{dr}$, et l'on a

$$(133) \quad \frac{dU}{dr} = D_{r,q} - D_{r,p}.$$

S'il s'agit d'un corpuscule du bord extérieur de l'anneau, le terme prépondérant de $\frac{dU}{dr}$ est $D_{r,q} = D_{q,q}$, l'attraction est négative; au contraire, sur un corpuscule du bord intérieur, l'attraction est positive, à cause de la prépondérance du second terme de $\frac{dU}{dr}$, terme qui devient $-D_{p,p}$. Mais l'attraction de la planète Saturne l'emporte toujours sur celle de l'anneau, de sorte qu'un corpuscule voisin du bord intérieur est soumis à une force centrale résultante dont la mesure algébrique est négative. C'est grâce à l'attraction de Saturne que tous les corpuscules constituant l'anneau peuvent se mouvoir sur des trajectoires presque circulaires; néanmoins leurs excentricités, au voisinage des bords de l'anneau, sont sensibles, et l'on peut appliquer les procédés du n° 67 à la détermination du sens et de l'amplitude des déplacements de leurs apsides.

Nous déduisons d'abord de (132) la relation suivante

$$D_{R,r} = \frac{r}{R} D_{r,R},$$

entre l'attraction du cylindre de rayon r sur le point $R > r$ et l'attraction du cylindre de rayon R sur le point $r < R$. Elle s'écrit

$$-rR D_{R,r} = -r^2 D_{r,R}.$$

Dans le premier membre, $-D_{R,r}$ est une fonction croissante de r , puisque la valeur absolue de l'attraction sur un point extérieur croît quand on augmente le rayon du cylindre, et cette valeur absolue est précisément égale à $-D_{R,r}$. Donc le premier membre croît avec r , c'est-à-dire décroît quand $s = \frac{1}{r}$ croît. Si l'on

exprime U par rapport à s , le second membre est égal à $\frac{dU}{ds}$ et décroît quand s croît; donc $\frac{d^2U}{ds^2}$ est négatif dans le cas de l'attraction d'un cylindre homogène circulaire droit sur un point intérieur équidistant des bases.

Nous avons maintenant, pour l'anneau de Saturne, d'après (133)

$$\frac{d^2U}{ds^2} = \frac{d}{ds}(-r^2 D_{r,q}) - \frac{d}{ds}(-r^2 D_{r,p}).$$

La dérivée $\frac{d}{ds}(-r^2 D_{r,p})$ est positive, car elle représente $\frac{d^2U}{ds^2}$ pour l'attraction du cylindre de rayon p sur un point extérieur à la distance r , et l'on a vu (n° 67) que $\frac{d^2U}{ds^2}$ est positif à l'extérieur des masses. La dérivée $\frac{d}{ds}(-r^2 D_{r,q})$, au contraire, est négative. Il en résulte que la dérivée $\frac{d^2U}{ds^2}$ relative à l'anneau de Saturne est la somme de deux termes négatifs; donc le déplacement des péri-saturnes et des aposaturnes des corpuscules sous la seule influence de l'anneau est toujours rétrograde ⁽¹⁾.

La vitesse moyenne de ce déplacement, pour r donné, s'obtient en remplaçant les lettres par leurs valeurs numériques dans le coefficient de t de la formule (130) (a représente r , et $\frac{C}{a^2}$ est égal à n , moyen mouvement du corpuscule considéré). On a

$$\text{valeur moyenne de } \frac{dx}{dt} = n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{C^2} \frac{d^2U}{ds^2}} \right).$$

69. Autre méthode pour étudier les oscillations du rayon vecteur. — Le système (123), qui remplace l'équation différentielle (66), ne se prête pas à une étude simple quand l'inclinaison de la trajectoire est différente de zéro. Le principal inconvénient consiste dans l'impossibilité de donner d'une manière commode

(1) L'action de l'anneau n'est pas la plus importante; l'aplatissement de la planète, et l'attraction de ses plus gros satellites, produisent des déplacements plus sensibles des lignes des apsides; leurs mouvements résultants s'effectuent dans le sens direct.

la valeur moyenne (approchée) de $\frac{d\chi}{d\nu}$; le signe même de cette valeur moyenne, qui fixe le sens du déplacement des apsides, n'apparaît pas avec certitude, car il n'est pas prouvé que le terme $\frac{\Lambda}{H} \cos(\nu - \chi)$ ait une valeur moyenne négligeable vis-à-vis de celle du terme $\Psi \cos^2(\nu - \chi)$. C'est pourquoi nous aurons recours à une autre décomposition de l'équation (66).

La substitution (68)

$$\sigma = \frac{\zeta}{\sqrt{G}}$$

doit être effectuée tout d'abord pour donner à (66) la forme canonique de Gylden-Lindstedt, où ne figure pas la dérivée première de la fonction inconnue. Il en résulte l'équation (69)

$$\frac{d^2 \zeta}{d\nu^2} + \left[1 - \Psi + \frac{1}{4G^2} \left(\frac{dG}{d\nu} \right)^2 - \frac{1}{2G} \frac{d^2 G}{d\nu^2} \right] \zeta = \Phi \sqrt{G},$$

Φ ayant la signification (63). Les oscillations de $\Phi \sqrt{G}$ accompagnent les oscillations de l'inclinaison, conformément aux résultats du n° 56. Supposons maintenant toute connue, comme fonction de ν , la quantité

$$1 - \Psi + \frac{1}{4G^2} \left(\frac{dG}{d\nu} \right)^2 - \frac{1}{2G} \frac{d^2 G}{d\nu^2},$$

ainsi que la fonction $\Phi \sqrt{G}$; l'intégrale générale de l'équation précédente pourra être présentée comme la somme de l'intégrale générale de cette équation privée du second membre et d'une intégrale particulière qui est de l'ordre de ε , pareillement au second membre, et exécute sensiblement deux oscillations au cours d'une révolution draconitique ⁽¹⁾. Autrement dit, les oscillations de ζ dues à la seule inclinaison de l'orbite sont de l'ordre de ε , tandis que les oscillations dues plus particulièrement à l'excentricité satisfont à l'équation

$$\frac{d^2 \zeta}{d\nu^2} + \left[1 - \Psi + \frac{1}{4G^2} \left(\frac{dG}{d\nu} \right)^2 - \frac{1}{2G} \frac{d^2 G}{d\nu^2} \right] \zeta = 0,$$

et sont, en général, plus importantes. Si nous avons en vue le

(1) Ainsi que le fait l'inclinaison.

déplacement séculaire de la ligne des apsides, nous pourrons, dans le coefficient de ς , négliger $\left(\frac{dG}{dv}\right)^2$ qui est de l'ordre de ε^2 , et négliger aussi le terme $\frac{1}{2G} \frac{d^2G}{dv^2}$ qui est périodique en première approximation, de l'ordre de ε , de valeur moyenne nulle, et produit seulement des inégalités séculaires de l'ordre de ε^2 (1). Donc, *en admettant que les oscillations de ς dues à l'excentricité sont d'un ordre de grandeur plus important que celui de ε , nous déduirons le mouvement des apsides de l'équation approchée*

$$(134) \quad \frac{d^2\varsigma}{dv^2} + (1 - \Psi)\varsigma = 0.$$

Les zéros de ς coïncidant avec ceux de σ , il y a un zéro et un seul de ς entre deux apsides consécutives (n° 66).

L'équation différentielle (66)

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2} + (1 - \Psi)\sigma = \Phi - \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\sigma}{dv},$$

dans laquelle on suppose connus Ψ et le second membre, se prête à un raisonnement analogue pour la décomposition de son intégrale générale, mais l'excentricité et le déplacement des apsides interviennent dans la solution particulière de l'ordre de ε , à cause de la présence de $\frac{d\sigma}{dv}$ au second membre. Néanmoins, *si l'ordre de grandeur de l'excentricité est plus important que celui de ε , on pourra étudier le déplacement des apsides au moyen de (66), en supprimant le second membre et en négligeant ε^2 ; l'équation approchée*

$$(135) \quad \frac{d^2\sigma}{dv^2} + (1 - \Psi)\sigma = 0$$

donne, d'ailleurs, au sujet des zéros de σ , les mêmes résultats que (134) au sujet des zéros de ς .

70. Convention relative à l'excentricité, lorsque l'inclinaison est différente de zéro. — Il a été commode, au n° 67, d'attribuer à

(1) Voir ce qui a été dit, dans le n° 67, au sujet des équations différentielles de Hill.

certaines orbites presque circulaires et d'inclinaisons très faibles, des excentricités de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\varepsilon}$. Nous venons de voir, en outre, que l'hypothèse d'une excentricité plus grande que les quantités de l'ordre de ε se montre nécessaire si l'on veut avoir des résultats simples concernant le mouvement de la ligne des apsides. *Nous conviendrons donc de ne faire entrer l'excentricité en ligne de compte que si elle est au moins de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\varepsilon}$.* Les orbites d'excentricités plus faibles seront assimilées à des circonférences, et l'on n'aura pas à s'occuper de la position de leurs apsides. Bien entendu, *l'existence d'une excentricité sensible ne peut pas être garantie pour une durée indéfinie*, mais cela importe peu pour les applications pratiques : on n'a besoin que de résultats temporaires.

Lorsqu'il sera question d'orbites faiblement excentriques, on pourra aussi bien considérer l'excentricité comme étant du premier ordre de petitesse, et la fonction perturbatrice comme étant du second ordre ⁽¹⁾.

71. Sens du déplacement de la ligne des apsides dans le plan orbital. Expression approchée de ce déplacement. — Soient η et ϖ deux nouvelles fonctions telles que

$$(136) \quad \sigma = S\eta \cos(\nu - \varpi), \quad \frac{d\sigma}{d\nu} = -S\eta \sin(\nu - \varpi).$$

La substitution (136) remplace l'équation différentielle approchée (135) par le système

$$(137) \quad \begin{cases} \frac{d\varpi}{d\nu} = \Psi \cos^2(\nu - \varpi), \\ \frac{1}{S\eta} \frac{d(S\eta)}{d\nu} = -\Psi \sin(\nu - \varpi) \cos(\nu - \varpi), \end{cases}$$

dont on aperçoit l'analogie avec les systèmes (109) et (111). Au

(1) C'est ce qui a été fait pour l'orbite intermédiaire de la Lune : l'inclinaison lunaire, l'excentricité lunaire et le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune autour de la Terre, sont regardés comme des quantités du premier ordre de petitesse; la fonction perturbatrice contient en facteur le carré du rapport des moyens mouvements.

surplus, les équations (137) peuvent être considérées comme des équations différentielles exactes, pourvu que l'on suppose connue la fonction Ψ ; mais les formules (136) ne seront alors vraies qu'à des quantités près de l'ordre de ε . L'expression rigoureuse de l'inverse du rayon vecteur sera la suivante

$$(138) \quad s = S[1 + \eta \cos(\nu - \varpi) + \text{termes en } \varepsilon].$$

En vertu de la convention du n° 70, nous ne nous occuperons que du cas où la fonction représentée par les termes en ε a son module maximum négligeable vis-à-vis de celui de la fonction η .

Il est facile d'adapter au système (137) les résultats obtenus pour les systèmes (109) et (111). Tout d'abord attribuons à la fonction Ψ un signe constant : il en sera réellement ainsi à l'intérieur d'une masse attirante telle que l'anneau de Saturne ou un amas globulaire d'étoiles, le signe constant étant négatif; il en sera encore ainsi à l'extérieur des masses attirantes pourvu que l'inclinaison de la trajectoire ne devienne pas trop forte (voir les expressions de Ψ du n° 26), et le signe de Ψ sera positif puisque ce signe est le même que celui de $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$, qui est positif pour $\varphi = 0$ (n° 67).

La fonction η est égale, à des quantités près de l'ordre de ε , à l'excentricité de l'orbite osculatrice; mais cette dernière, étant au moins aussi importante que $\sqrt{\varepsilon}$ (n° 70), a même partie principale que η ; η peut donc être considéré comme représentant l'excentricité. Pareillement aux oscillations de l'inclinaison, les oscillations de η sont de deux sortes : 1° des oscillations courtes, liées à chaque révolution anomalistique et ayant une amplitude de l'ordre de ε ; ces oscillations sont négligeables dans la variation de η ; 2° des oscillations de longue durée qui donnent à η , pendant chaque révolution, une variation de l'ordre de ε^2 , mais qui, en s'accumulant, finissent par produire une variation sensible. Il résulte de ce fait que l'excentricité de la trajectoire, supposée être à une époque donnée d'ordre 1 ou d'ordre zéro par rapport à $\sqrt{\varepsilon}$, peut devenir, au bout d'un temps très long, de l'ordre de ε . A ce moment-là, les théorèmes concernant le déplacement des apsides ne s'appliqueront plus.

En nous basant, comme nous l'avons dit, sur la prépondérance du terme $S\eta \cos(\nu - \varpi)$ dans l'expression de $s - S$ tirée de (138), nous pouvons énoncer les propositions suivantes

1° ϖ est assimilable, au moins temporairement, à un argument isocinétique avec la longitude orbitale du périastre (¹).

2° Le périastre et l'apoastre exécutent des oscillations de l'ordre de ε , dont la résultante équivaut à un déplacement direct ou rétrograde suivant que Ψ est positif ou négatif. Donc, à l'extérieur des masses attirantes, si l'inclinaison n'est pas trop forte, le mouvement résultant de la ligne des apsides s'effectue dans le sens direct; à l'intérieur d'une masse telle qu'un amas d'étoiles, il s'effectue toujours dans le sens rétrograde.

3° La dérivée $\frac{d\varpi}{d\nu}$ peut être regardée, temporairement, comme ayant une certaine valeur moyenne; la vitesse angulaire $\frac{d\nu}{dt}$ ayant aussi, pratiquement, une valeur moyenne, on a, en faisant le produit de ces deux valeurs moyennes, une valeur approchée du moyen mouvement (²) de la ligne des apsides.

4° On obtient la valeur moyenne approchée de $\frac{d\varpi}{d\nu}$ en exprimant le second membre de l'équation

$$\frac{d\varpi}{d\nu} = \Psi \cos^2(\nu - \varpi),$$

par rapport à ν , comme si le mouvement était elliptique. En désignant par Ψ_m la valeur moyenne correspondante de Ψ , on en déduit

$$\text{valeur moyenne approchée de } \frac{d\varpi}{d\nu} = \frac{\Psi_m}{2},$$

d'où

$$\text{moyen mouvement approché du périastre} = n \frac{\Psi_m}{2},$$

(¹) ϖ ne peut être rigoureusement isocinétique avec la longitude orbitale du périastre que si le mouvement est quasi-périodique (voir la deuxième Note du n° 66).

(²) Il s'agit de moyen mouvement au sens courant de l'astronomie, et non au sens rigoureux du n° 54.

n étant le moyen mouvement osculateur substitué à la vitesse angulaire moyenne.

72. Application à quelques cas simples. — Prenons les potentiels que nous avons rassemblés, au n^o 57, dans la formule

$$U = \frac{1}{r} + \varepsilon r^h (1 - \beta \sin^2 \varphi) = s + \frac{\varepsilon}{s^h} (1 - \beta \sin^2 \varphi),$$

(*h* entier, $\varepsilon\beta > 0$). Un calcul facile donne, en négligeant ε^2 ,

$$S = \frac{1}{G^2} - \varepsilon h G^{2h} (1 - \beta \sin^2 \varphi),$$

d'où

$$\Psi = \frac{\varepsilon h \left(\frac{1}{s^{h+1}} - G^{2h+2} \right) (1 - \beta \sin^2 \varphi)}{\frac{1}{s} - G^2}.$$

Si le mouvement était elliptique, on aurait

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin i \sin(\nu - \psi), & \psi &= \text{const.}, & i &= \text{const.}, \\ s &= \frac{\cos^2 i}{G^2} [1 + e \cos(\nu - \chi)], & \chi &= \text{const.}, & e &= \text{const.}, & G &= \frac{C}{\cos i}. \end{aligned}$$

Effectuons, dans Ψ , la substitution indiquée par ces formules, et arrêtons-nous aux termes du premier degré dans le développement final suivant les puissances de l'excentricité; il vient

$$\Psi = \varepsilon h(h+1) \left(\frac{C^2}{\cos^2 i} \right)^{h+1} [1 - k e \cos(\nu - \chi)] [1 - \beta \sin^2 i \sin^2(\nu - \psi)],$$

k étant un coefficient qui dépend de *h*. Lorsque ν varie, cette expression de Ψ a pour valeur moyenne

$$\Psi_m = \varepsilon h(h+1) \left(\frac{C^2}{\cos^2 i} \right)^{h+1} \left(1 - \frac{\beta}{2} \sin^2 i \right).$$

D'autre part, la valeur moyenne approchée de $\frac{d\nu}{dt}$, déduite de la formule

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{Cs^2}{\cos i},$$

est égale à $\frac{\cos^3 i}{C^3}$, et peut être mise à la place du moyen mouvement

osculateur. Par suite, *le moyen mouvement approché du périastre exprimé par rapport à C et i, est*

$$\varpi'_m = \varepsilon \frac{h(h+1)}{2} \left(\frac{C}{\cos i} \right)^{2h-1} \left(1 - \frac{\beta}{2} \sin^2 i \right).$$

Nous avons négligé non seulement ε^2 qui est négligeable, mais aussi εe^2 ; le résultat ci-dessus s'applique donc toutes les fois que ε^2 et εe^2 définissent le même ordre de grandeur, c'est-à-dire *quand l'excentricité est une quantité du même ordre que $\sqrt{\varepsilon}$* . Dans le cas d'une excentricité plus forte, le même procédé permet d'obtenir approximativement le moyen mouvement du périastre, avec un calcul un peu plus compliqué; à l'expression ci-dessus de ϖ'_m s'ajoutent des termes contenant en facteurs les puissances successives de e .

Si nous faisons $h = -3$ et $\beta = 3$, nous obtenons la vitesse angulaire moyenne de la ligne des apsides d'un satellite éloigné sous l'action perturbatrice de l'aplatissement de la planète; le terme indépendant de l'excentricité est

$$[\varpi'_m]_0 = 3\varepsilon \frac{\cos^7 i}{C^7} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \quad (h = -3, \beta = 3).$$

L'hypothèse $h = -3 = -\beta$ s'applique encore à une planète gravitant à grande distance d'un système de deux autres corps célestes (Soleil-Planète, ou étoile double) qui décrivent l'un autour de l'autre une circonférence.

Posons maintenant $h = 2$ et $\beta = 3$; nous aurons un résultat applicable, par exemple, au mouvement de Mercure en tant qu'il est troublé par Jupiter, ou aux perturbations produites par un astre central dans le mouvement d'un satellite tournant à faible distance d'une planète de son système dont l'orbite serait presque circulaire; le premier terme du développement du moyen mouvement du périastre suivant les puissances de e , est alors

$$[\varpi'_m]_0 = 3\varepsilon \frac{C^2}{\cos^3 i} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \quad (h = 2, \beta = 3).$$

Le terme correspondant du moyen mouvement orbital du nœud,

qui a été calculé au n° 57, est

$$\text{Avec } h = -3 \text{ et } \beta = 3 \dots [\psi'_m]_0 = -3\varepsilon \frac{\cos^2 i}{C^7};$$

$$\text{Avec } h = 2 \text{ et } \beta = 3 \dots [\psi'_m]_0 = -3\varepsilon \frac{C^3}{\cos i}.$$

On vérifie sans peine la loi de M. Chazy

$$[\psi'_m]_0 + [\varpi'_m]_0 = 0,$$

concernant les trajectoires d'inclinaison nulle à l'extérieur des masses attirantes ⁽¹⁾.

Dans les deux cas que nous venons d'envisager, la fonction Ψ est égale au produit de $1 - 3 \sin^2 \varphi$ par une quantité positive; le théorème du n° 71, concernant le déplacement moyen, dans le sens direct, de la ligne des apsides, à l'extérieur des masses, a donc lieu tant que $\sin^2 \varphi$ n'excède pas $\frac{1}{3}$, ce qui correspond à φ compris entre $-35^\circ \frac{4}{15}$ et $+35^\circ \frac{4}{15}$ environ, mais il faut élargir cet intervalle ⁽²⁾, car le second membre de l'équation

$$\frac{d\varpi}{d\nu} = \Psi \cos^2(\nu - \varpi)$$

a encore une valeur moyenne approchée positive si $\sin^2 \varphi$ dépasse $\frac{1}{3}$ tout en restant inférieur à une certaine limite. La formule

$$\sin \varphi = \sin i \sin(\nu - \psi)$$

donne comme valeur moyenne de $\sin^2 \varphi$, $\frac{\sin^2 i}{2}$, en négligeant les variations de l'inclinaison; on peut donc admettre comme règle pratique que le déplacement moyen des apsides est direct ou rétrograde suivant que $\sin^2 i$ est inférieur ou supérieur à $\frac{2}{3}$ (une marge d'incertitude, de l'ordre de grandeur de ε , doit être laissée

(1) Voir la fin du n° 67.

(2) Qui est déjà considérable : les latitudes telles que $\pm 35^\circ$ sont rarement atteintes dans les problèmes usuels.

au voisinage de $\sin^2 i = \frac{2}{3}$, qui correspond à une inclinaison approximative de $54^\circ \frac{11}{15}$.

Pour les trajectoires des étoiles d'un amas, la fonction Ψ est toujours négative, quelle que soit l'inclinaison (n° 26). Quant à faire une évaluation du déplacement rétrograde des apsides, la chose n'est possible, par la méthode précédente, que si la masse du noyau central est énorme par rapport à celle du reste de l'amas (1). On doit faire $h = 2$, $\varepsilon = -\alpha < 0$, et remplacer le produit $\varepsilon\beta$ par $\beta > 0$, afin de retrouver le potentiel (72). Le développement du moyen mouvement du péricentre suivant les puissances successives de l'excentricité commence par le terme

$$[\varpi'_m]_0 = -\frac{3C^3}{\cos^3 i} \left(\alpha + \frac{3}{2} \sin^2 i \right).$$

73. Déplacement des apsides quand le plan de référence est le

(1) Mais la formule

$$\varpi'_m = n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{C^2} \frac{d^2 U \left(\frac{1}{a} \right)}{d \left(\frac{1}{a} \right)^2}} \right)$$

(nos 22 et 67) peut toujours être employée quand l'orbite est peu différente d'un cercle de rayon a et d'inclinaison négligeable. Lorsque l'amas, par exemple, est homogène, on a, dans le plan de l'équateur

$$U(s) = -\frac{k^2}{s^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 U \left(\frac{1}{a} \right)}{d \left(\frac{1}{a} \right)^2} = -6k^2 a^4.$$

et a satisfait approximativement à l'équation

$$U \left(\frac{1}{a} \right) + h = \frac{C^2}{2a^2} \quad (h, \text{ constante des forces vives}),$$

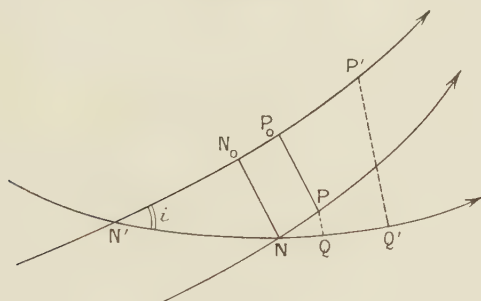
qui doit admettre une racine double (point d'équilibre du n° 30); il en résulte

$$\begin{aligned} 6k^2 a^4 &= C^2, \\ \text{d'où} \quad a &= \sqrt[4]{\frac{C^2}{6k^2}}, \\ \varpi'_m &= -n; \end{aligned}$$

le mouvement d'inclinaison nulle étant, en outre, périodique, cette formule exprime que la ligne des apsides effectue une rotation de -180° entre un péricentre ou un apocentre et le suivant; les trajectoires correspondantes sont, d'ailleurs, des ellipses de centre O (n° 32).

plan de l'équateur. Exemples. — Le fait de rapporter le mouvement de chaque corps céleste au plan orbital mobile de Hansen nous a permis de caractériser, sans trop de difficultés, le déplacement de la ligne des apsides. Cependant, les résultats obtenus, de cette façon, ne sont pas complets, on ne sait pas comment se comporte la ligne des apsides relativement au plan fondamental de l'équateur, et tout d'abord le sens de son déplacement n'est pas forcément le même, *a priori*, dans ce plan et dans celui de Hansen. Nous avons vu, en effet (n° 50), que la longitude φ croissant plus vite que la longitude θ , deux valeurs de φ dont la différence est un peu supérieure à 2π peuvent correspondre à deux valeurs de θ dont la différence est inférieure à 2π : un déplacement direct du périastre quand la variable angulaire est φ peut donc équivaloir à un déplacement rétrograde avec la variable angulaire θ . On s'en rend compte, du reste, géométriquement, en considérant, par exemple, un périastre P voisin d'un nœud ascendant N et ayant une latitude

Fig. 5.



positive (voir figure); après une révolution anomalistique, le nœud N, ayant rétrogradé, est venu en N'; le point du plan orbital qui coïncidait avec N' est venu en N₀, celui qui coïncidait avec P est venu en P₀, et le périastre P, que nous supposons animé d'un mouvement direct, est venu en P' (¹). Soient Q et Q' les projections des points P et P' sur le plan de l'équateur; le déplacement orbital du périastre est figuré par l'arc P₀P', tandis que son déplacement en projection équatoriale est figuré par l'arc QQ'; or ce

(¹) Les angles $\widehat{N'N_0N}$, $\widehat{N'P_0P}$ sont assimilables à des angles droits.

dernier arc est négatif lorsque le point Q' est situé entre les projections des points P₀ et P, ce qui se traduit par la relation approchée

$$\operatorname{tang} i > \sqrt{-\frac{P_0 P'}{N_0 N'}} \quad (\varepsilon^2 \text{ négligé}).$$

Il conviendrait d'examiner analytiquement la question, mais l'équation (18), ou

$$\frac{d^2 \left(\frac{s}{\cos \varphi} \right)}{d\theta^2} + \frac{s}{\cos \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{C^2} \left(\cos \varphi \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\sin \varphi}{s} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right),$$

qui est naturellement indiquée pour cela, ne se prête pas à une étude facile. Nous indiquerons donc simplement une méthode d'approximation, indépendamment de l'équation (18) et en assimilant la trajectoire réelle à une orbite absolue quasi-périodique.

Les accroissements moyens des longitudes équatoriale et orbitale du corps mobile, durant une révolution draconitique, sont respectivement

$$\frac{2\pi}{1+p} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{1+l},$$

les constantes p et l représentant les valeurs moyennes de $-\frac{d\omega}{d\theta}$ et $-\frac{d\psi}{d\nu}$ (n° 53). Il s'ensuit que le rapport des accroissements de θ et de ν dans un intervalle de temps quelconque, oscille de part et d'autre de la valeur moyenne $\frac{1+l}{1+p}$. Par conséquent, si l'accroissement moyen de ν durant une révolution anomalistique est égal à $\frac{2\pi}{1-q}$ (n° 66), l'accroissement correspondant de θ sera

$$\frac{2\pi(1+l)}{(1-q)(1+p)},$$

et la longitude équatoriale du périastre s'exprimera par la formule

$$(139) \quad \nu = m\theta + \text{agrégat de Gylden, à deux fréquences,}$$

dans laquelle

$$m = 1 - \frac{(1+p)(1-q)}{1+l}.$$

Comme l , p et q sont de l'ordre de ε , on peut encore écrire, en négligeant ε^2 ,

$$(140) \quad m = l - p + q.$$

La différence $l - p$ est toujours négative, tandis que q est positif ou négatif. Si l'on a l'inégalité

$$0 < q < p - l,$$

la ligne des apsides se déplacera avec une vitesse angulaire moyenne positive dans le plan orbital, cependant que sa projection sur le plan de l'équateur aura une vitesse angulaire moyenne négative.

A titre d'exemple, calculons m pour une orbite voisine d'un cercle de centre O, d'inclinaison sensiblement constante (les oscillations de courte durée de i sont négligées), dans le champ de forces défini par

$$U = s + \frac{\varepsilon}{s^h} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \quad (h \text{ entier}).$$

En nous reportant au n° 57, et en négligeant toujours ε^2 , nous avons

$$l = \frac{3\varepsilon}{s^{h+2}} \frac{\cos^2 i}{G^2},$$

formule dans laquelle i , s et G doivent être considérés comme constants, s pouvant être remplacé par $\frac{1}{G^2}$. La durée moyenne d'une révolution draconitique est

$$\tau = \frac{2\pi}{g \left(1 + \frac{3\varepsilon}{s^{h+2}} \frac{\cos^2 i}{G^2} \right)},$$

en désignant par g la valeur moyenne de $\frac{dv}{dt}$. Pour obtenir la constante p , il suffit de diviser la valeur absolue moyenne de $\frac{d\omega}{dt}$, par $\frac{2\pi}{\tau}$ diminué de cette valeur absolue moyenne; cela résulte des égalités

$$\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{d\omega}{dt},$$

qui ont lieu lorsqu'on remplace les dérivées par leurs valeurs

moyennes. Comme $\frac{d\omega}{dt}$ a pour valeur moyenne (n° 57)

$$- \frac{3\varepsilon}{s^h} \frac{\cos i}{G},$$

nous en déduisons

$$p = \frac{\frac{3\varepsilon}{s^h} \frac{\cos i}{G}}{g \left(1 + \frac{3\varepsilon}{s^{h+2}} \frac{\cos^2 i}{G^2} \right) - \frac{3\varepsilon}{s^h} \frac{\cos i}{G}}.$$

Remarquons, en outre, que p étant de l'ordre de grandeur de ε , on peut négliger des quantités de cet ordre-là dans les valeurs moyennes des éléments dont on se sert pour calculer p ; en particulier on peut substituer à g , valeur moyenne de Gs^2 , le produit de G par $\frac{1}{G^4}$, puis négliger les termes en ε dans le dénominateur de l'expression précédente. On a ainsi

$$p = 3\varepsilon G^{2h+2} \cos i.$$

En traitant l de la même façon que p , on écrit

$$l = 3\varepsilon G^{2h+2} \cos^2 i.$$

Enfin, en admettant que l'excentricité de l'orbite képlérienne osculatrice est de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, la constante q est égale à la moitié de la valeur moyenne de Ψ , qui a été obtenue au n° 72

$$q = \frac{\varepsilon h(h+1)}{2} G^{2h+2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right).$$

La formule (140) donne alors

$$m = \varepsilon G^{2h+2} \left[\frac{h(h+1)}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) - 3 \cos i (1 - \cos i) \right].$$

Le moyen mouvement, dans le plan de l'équateur, de la projection de la ligne des apsides, est égal, d'après (108) et (139), au produit de m par la valeur moyenne de $\frac{d\theta}{dt}$, ou, ce qui revient au même, au produit de m par la valeur moyenne de $\frac{1}{p} \frac{d\omega}{dt}$. Appelons v'_m ce moyen mouvement; nous avons

$$v'_m = gm + \text{termes en } \varepsilon^2,$$

ou, avec l'approximation convenue,

$$v'_m = \varepsilon G^{2h-1} \left[\frac{h(h+1)}{2} \left(\frac{3 \cos^2 i - 1}{2} \right) - 3 \cos i (1 - \cos i) \right].$$

Dans le champ d'attraction d'un sphéroïde aplati ou d'un système de deux anneaux circulaires de Gauss, lorsque le point mobile est éloigné, on a

$$v'_m = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{G^7} (5 \cos^2 i - 2 \cos i - 1),$$

qui correspond à $h = -3$ dans l'expression de U. On voit que le déplacement des apsides par rapport au plan de l'équateur s'effectue, en moyenne, dans le sens direct si l'on a

$$\cos i > \frac{1 + \sqrt{6}}{5},$$

c'est-à-dire si l'inclinaison est inférieure à une limite d'environ $46^\circ \frac{3}{8}$; il s'effectue dans le sens rétrograde quand l'inclinaison dépasse cette valeur, mais relativement au plan orbital il s'effectue encore dans le sens direct tant que l'inclinaison n'atteint pas $54^\circ \frac{11}{15}$ (n° 72).

En faisant $h = 2$, nous aurons un résultat applicable à un corps mobile sous l'influence d'une masse centrale et d'un anneau de Gauss de grand rayon

$$v'_m = \frac{3}{2} \varepsilon G^3 (5 \cos^2 i - 2 \cos i - 1).$$

Les projections des apsides sur le plan de l'équateur se déplacent, en moyenne, dans le sens direct, pour des inclinaisons dont la limite supérieure est encore $46^\circ \frac{3}{8}$; le sens du déplacement des apsides dans le plan orbital est soumis, lui aussi, à la même règle que dans le cas de $h = -3$.

CHAPITRE IX.

CHAMPS D'ATTRACTION AVEC DES ANNEAUX ELLIPTIQUES DE GAUSS. RÉVOLUTION OU LIBRATION DES PÉRIHÉLIES. ORBITES ABSOLUES.

74. Équations différentielles effectuant la variation des constantes lorsqu'on remplace l'attraction d'un anneau circulaire de Gauss par celle d'un anneau elliptique. — L'emploi d'anneaux circulaires de Gauss dans la théorie des perturbations planétaires donne une première approximation des variations séculaires des éléments. Si les résultats ainsi obtenus sont satisfaisants dans certains cas, ils sont insuffisants dans d'autres, et il arrive même qu'ils soient en contradiction avec les faits observés : par exemple les actions de Mercure sur les périhélies de Vénus et de la Terre, de la Terre sur le périhélie de Vénus, et de Saturne sur le périhélie de Neptune, qui semblent devoir être des avances, sont en réalité des retards, et cela n'est évidemment pas dû à des commensurabilités approchées entre les moyens mouvements de ces planètes. Nous rechercherons donc l'influence de l'excentricité de chaque planète troublante, en introduisant, dans la fonction perturbatrice, les termes dus à l'ellipticité de l'anneau de Gauss correspondant.

Soit un champ de gravitation formé par une masse centrale et un anneau de Gauss d'excentricité e' , ou par un système de deux anneaux de Gauss, d'excentricité commune e' , inversement homothétiques par rapport à l'origine (n° 43; 2°). Le potentiel des forces attirantes peut se mettre sous la forme

$$(141) \quad U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) + \varepsilon e' \Omega'(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta),$$

Ω' étant, comme Ω , une fonction paire de φ , et étant, en outre, une fonction périodique de θ , de période 2π .

Supposons connue une solution quasi-périodique des équations

du mouvement écrites avec la fonction de forces

$$U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi)$$

$$(142) \quad \begin{cases} \rho = \alpha_0 + \Sigma a_{m_1, m_2} e^{(m_1 u_1 + m_2 u_2) \sqrt{-1}} & u_1 = at + c, \\ \varepsilon = \Sigma b_{m_1, m_2} e^{(m_1 u_1 + m_2 u_2) \sqrt{-1}} & u_2 = bt + k, \\ \theta = u_3 + \Sigma g_{m_1, m_2} e^{(m_1 u_1 + m_2 u_2) \sqrt{-1}} & u_3 = jt + l, \end{cases}$$

solution quasi-périodique relativement au temps, avec les trois fréquences a, b, j (¹). Lorsqu'on remplace le potentiel

$$U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi)$$

par le potentiel U de la formule (141), il est possible de faire varier les six constantes de cette solution de manière que les expressions (142) de ρ, ε et θ satisfassent encore aux équations du mouvement. Appliquons la méthode de M. Heinrich, exposée au n° 10. Les variables de position étant u_1, u_2, u_3 , nous devons prendre comme variables conjuguées

$$(143) \quad \begin{cases} f_1 = \left[\frac{\partial T}{\partial u_1} \right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial u_1} du_1 du_2 du_3, \\ f_2 = \left[\frac{\partial T}{\partial u_2} \right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial u_2} du_1 du_2 du_3, \\ f_3 = \left[\frac{\partial T}{\partial u_3} \right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial u_3} du_1 du_2 du_3, \end{cases}$$

la demi-force vive T étant exprimée au moyen des formules (142), et u'_1, u'_2, u'_3 devant être remplacés par a, b, j . Dans le mouvement non troublé ($\varepsilon' = 0$), f_1, f_2, f_3 sont des constantes. Les équations différentielles du mouvement troublé sont :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial f_i}, \quad \frac{df_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

avec

$$K = af_1 + bf_2 + jf_3 - [T] - \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] - \varepsilon e' \Omega'.$$

(¹) Dans la pratique, on n'aura que des expressions approchées de ρ, ε et θ , expressions tirées de séries divergentes asymptotiques (Chap. V).

Les parties séculaires figurées entre crochets se rapportent à la solution quasi-périodique du système non troublé. On a

$$K = \frac{af_1 + bf_2 + jf_3}{2} - \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] - \varepsilon e' \Omega'.$$

La partie séculaire de $\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi)$ doit être exprimée en fonction de f_1, f_2, f_3 , de même que les quantités a, b, j , et dans la fonction perturbatrice additionnelle $\varepsilon e' \Omega'$, les coordonnées doivent être exprimées en fonction de $u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3$. Les équations du mouvement troublé s'écrivent alors ⁽¹⁾

$$(144) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial f_1} \left(\frac{af_1 + bf_2 + jf_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial f_1} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] - \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial f_1} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{df_1}{dt} = \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial u_1}; \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial f_2} \left(\frac{af_1 + bf_2 + jf_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial f_2} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] - \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial f_2} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{df_2}{dt} = \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial u_2}; \\ \frac{du_3}{dt} = \frac{\partial}{\partial f_3} \left(\frac{af_1 + bf_2 + jf_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial f_3} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] - \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial f_3} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{df_3}{dt} = \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial u_3}. \end{array} \right.$$

Si l'on fait $e' = 0$, ces équations doivent naturellement se réduire à

$$\begin{array}{lll} \frac{du_1}{dt} = a_0, & \frac{du_2}{dt} = b_0, & \frac{du_3}{dt} = j_0. \\ f_1 = \text{const.}, & f_2 = \text{const.}, & f_3 = \text{const.}, \end{array}$$

où a_0, b_0, j_0 désignent les valeurs de a, b, j pour $e' = 0$; les indices zéro indiquent que nous les traitons comme des constantes absolues; au contraire, a, b, j varient avec f_1, f_2, f_3 . La présence des termes en $\varepsilon e'$ de la fonction perturbatrice transforme nécessairement les seconds membres des trois équations

$$\frac{du_1}{dt} = a_0, \quad \frac{du_2}{dt} = b_0, \quad \frac{du_3}{dt} = j_0$$

(1) Les six constantes à faire varier sont : f_1, f_2, f_3, c, k, l .

par l'addition de termes en $\varepsilon e'$; il en résulte, par comparaison avec (144), que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f_1} \left(\frac{af_1 + bf_2 + jf_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial f_1} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] &= a_0 + \varepsilon e' U_1(f_1, f_2, f_3), \\ \frac{\partial}{\partial f_2} \left(\frac{af_1 + bf_2 + jf_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial f_2} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] &= b_0 + \varepsilon e' U_2(f_1, f_2, f_3), \\ \frac{\partial}{\partial f_3} \left(\frac{af_1 + bf_2 + jf_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial f_3} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) \right] &= j_0 + \varepsilon e' U_3(f_1, f_2, f_3). \end{aligned}$$

Les fonctions U_1, U_2, U_3 ainsi définies permettent de donner au système (144) la forme suivante :

$$(145) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{du_1}{dt} = a_0 + \varepsilon e' \left(U_1 - \frac{\partial \Omega'}{\partial f_1} \right), & \frac{df_1}{dt} = \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial u_1}, \\ \frac{du_2}{dt} = b_0 + \varepsilon e' \left(U_2 - \frac{\partial \Omega'}{\partial f_2} \right), & \frac{df_2}{dt} = \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial u_2}, \\ \frac{du_3}{dt} = j_0 + \varepsilon e' \left(U_3 - \frac{\partial \Omega'}{\partial f_3} \right), & \frac{df_3}{dt} = \varepsilon e' \frac{\partial \Omega'}{\partial u_3}, \end{array} \right.$$

qui montrera plus nettement le rôle de l'excentricité e' ⁽¹⁾.

75. Convention relative aux excentricités des planètes et des satellites. — La présence de termes en $\varepsilon e'$ dans la fonction perturbatrice et dans les équations du mouvement nous conduit à généraliser la convention faite au n° 70.

Étant donné que nous négligeons ε^2 dans les calculs approchés qui concernent les déplacements des nœuds et des apsides, nous devons négliger $\varepsilon e'$ lorsque e' sera une quantité de l'ordre de ε . Par analogie avec le n° 70, nous conviendrons donc de ne tenir compte de l'excentricité e' que si elle est au moins aussi importante que $\sqrt{\varepsilon}$. De cette façon, les excentricités du corps troublant et du corps troublé (planètes ou satellites), si elles sont assez faibles, pourront être considérées comme du premier ordre de petitesse, la force perturbatrice étant du second ordre; on négligera les petites quantités à partir du quatrième ordre. Si

(¹) Le système (145) se prête à une intégration facile par la méthode des approximations successives.

les excentricités sont trop faibles pour que l'observation puisse vérifier les résultats du calcul, on les négligera (1).

76. Mouvements quasi-périodiques dans les champs de gravitation du type $U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) + \varepsilon \varepsilon' \Omega'(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta)$.

— Le point matériel mobile ne peut s'éloigner à l'infini (n° 5) à cause de la valeur négative de la constante des forces vives; nous sommes donc dans un cas analogue au « cas oscillatoire » du problème général des trois corps. Lorsque le temps croît indéfiniment, le rayon vecteur et la vitesse conservent des valeurs finies, ou bien, pour des conditions initiales exceptionnelles, les mouvements comportent des chocs avec la masse centrale ou avec les anneaux de Gauss attirants, ou simplement une tendance à un tel choc, avec rapprochement indéfini de la masse correspondante. Parmi les mouvements limites des mouvements réels, il existe, bien entendu, des mouvements périodiques et des mouvements récurrents qu'on pourra substituer aux mouvements réels pendant un intervalle de temps dépassant largement les besoins de la pratique.

La difficulté réside ici dans la représentation des mouvements récurrents. Le problème étant à trois degrés de liberté, le domaine des états de mouvement est à six dimensions, ou seulement à cinq dimensions si l'on se donne la constante des forces vives. Plaçons-nous dans cette hypothèse; toute hypersurface de section (par exemple $\rho' = 0$) du domaine des états de mouvement (voir n° 39) est quadri-dimensionnelle et illimitée. Les familles de mouvements périodiques ou récurrents correspondent chacune, dans l'hypersurface de section, soit à un système de points (mouvements périodiques), soit à un système de courbes fermées, soit à un système de surfaces fermées à deux dimensions, soit à un système de surfaces fermées à trois dimensions. La répartition des mouvements d'une de ces quatre catégories par rapport à ceux de la catégorie suivante, dans le domaine des états de mouvement, est comparable à celle des mouvements périodiques par rapport aux

(1) Le déplacement des apsides d'une orbite, quand l'excentricité est extrêmement faible, n'est pas forcément inaccessible à l'observation. Dans ce cas, pour que le calcul puisse en rendre compte, il faudrait tenir compte de l'influence des termes analogues aux termes en ε de la formule (138).

mouvements récurrents lorsqu'il s'agit du problème à deux degrés de liberté étudié au Chapitre V; les mouvements récurrents associés à des surfaces à trois dimensions sont donc les plus abondamment distribués, puis viennent ceux associés à des surfaces à deux dimensions, etc. Nous ne connaissons malheureusement aucun moyen d'exprimer les coordonnées d'un point mobile sur une trajectoire récurrente lorsque celle-ci correspond à une surface invariante ⁽¹⁾; nous parlerons donc principalement des mouvements récurrents associés à des courbes invariantes, lesquels mouvements comprennent, comme cas particuliers, les mouvements périodiques.

Si nous prenons comme point de départ une solution quasi-périodique par rapport au temps, avec deux fréquences fondamentales, dans le champ de forces $U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi)$, nous obtiendrons, au moyen d'équations analogues à (144) ou (145), le prolongement de cette solution pour les diverses valeurs de l'excentricité e .

La solution de départ ne possédant que deux fréquences fondamentales, nous devons supposer qu'il existe entre les constantes a, b, j , une relation linéaire homogène à coefficients entiers; il est alors possible (n° 10) de changer les variables u_1, u_2, u_3 par une substitution linéaire à coefficients entiers de déterminant égal à 1, de manière que l'une des nouvelles constantes jouant le rôle de a, b, j soit égale à zéro. Désignons par Q_1, Q_2, Q_3 les nouvelles variables angulaires

$$Q_1 = n_1 t + k_1, \quad Q_2 = n_2 t + k_2, \quad Q_3 = k_3,$$

et par R_1, R_2, R_3 les nouvelles variables conjuguées de

⁽¹⁾ L'existence de nombres rotationnels (*rotation numbers*), démontrée pour les systèmes invariants de courbes fermées, n'a pas été établie pour les systèmes invariants de surfaces fermées. On a émis l'opinion qu'à un système invariant de surfaces fermées à n dimensions pourraient correspondre n variables angulaires et n *rotation numbers*. Mais cela n'est pas certain; en effet, dans les champs de forces de révolution qui ont été précédemment envisagés, le problème dans l'espace est à trois degrés de liberté et le domaine correspondant des états de mouvement est à six dimensions; l'intégrale des forces vives et l'intégrale des aires permettent de réduire le nombre des dimensions à quatre, d'où des « surfaces de section » à trois dimensions; et cependant il n'y a que deux *rotation numbers*.

M. Heinrich

$$R_1 = \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_1} \right], \quad R_2 = \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_2} \right], \quad R_3 = \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_3} \right].$$

Le système différentiel (145) se transforme en

$$(146) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1}{dt} = n_1^{(0)} + \varepsilon e' \Phi_1(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3), \\ \frac{dQ_2}{dt} = n_2^{(0)} + \varepsilon e' \Phi_2(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3), \\ \frac{dQ_3}{dt} = \varepsilon e' \Phi_3(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3), \\ \frac{dR_1}{dt} = \varepsilon e' \Psi_1(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3), \\ \frac{dR_2}{dt} = \varepsilon e' \Psi_2(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3), \\ \frac{dR_3}{dt} = \varepsilon e' \Psi_3(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3) \end{array} \right.$$

($n_1^{(0)}$, $n_2^{(0)}$, valeurs de n_1 , n_2 , pour $e' = 0$). Les fonctions Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 sont holomorphes au voisinage de l'orbite non troublée ($e' = 0$) et admettent, ainsi que leurs dérivées successives, la période 2π par rapport aux variables Q_1 , Q_2 .

Les méthodes du Chapitre V (n^{os} 41 à 44) sont applicables au système (146), en considérant Q_1 et Q_2 comme des variables qui « tournent », et Q_3 , R_1 , R_2 , R_3 comme des variables qui oscillent chacune de part et d'autre d'une valeur moyenne. En faisant varier la solution périodique de départ par l'addition de termes en $\varepsilon e'$ aux paramètres dont elle dépend ⁽¹⁾, on est amené à représenter une infinité de solutions de (146) sous une forme bipériodique, mais avec des séries divergentes. Or, il existe des conditions initiales telles que la quasi-périodicité formelle de ces séries corresponde à une quasi-périodicité réelle avec deux fréquences fondamentales voisines de $n_1^{(0)}$ et $n_2^{(0)}$. Cette affirmation équivaut, en effet, à la suivante : il existe, sur chaque « surface de section », des ensembles finis invariants de courbes fermées, dont chacun est caractérisé par un *rotation number* et tend, pour $e' \rightarrow 0$, vers un ensemble fini invariant de courbes fermées possédant comme

(1) De manière à avoir des quantités paramétriques analogues à $\varepsilon\beta$ et $\varepsilon\gamma$ du n° 41.

rotation number $\frac{n_1^{(0)}}{n_2^{(0)}}$. Mais les orbites bipériodiques à fréquences voisines de $n_1^{(0)}$ et $n_2^{(0)}$ ne sont pas les seules orbites bipériodiques, car il peut se faire, par exemple, que la variable angulaire Q_3 , au lieu d'osciller de part et d'autre d'une valeur moyenne, soit animée d'une vitesse moyenne de rotation (qui est évidemment de l'ordre de $\varepsilon e'$) et que cette vitesse moyenne de rotation soit commensurable avec celle de Q_1 ou de Q_2 . Il est clair que les orbites bipériodiques de cette espèce proviennent d'orbites tripériodiques dont on fait varier les paramètres de façon que deux de leurs fréquences deviennent commensurables entre elles. Leur représentation asymptotique s'obtient donc en appliquant non pas au système (146), mais au système (145) les méthodes des n^{os} 41 à 44, en considérant trois variables tournantes au lieu de deux.

Pour en revenir aux orbites bipériodiques de la première espèce ⁽¹⁾, remarquons l'analogie des systèmes (146) et (85). Il y a deux variables angulaires qui tournent : ζ et λ dans (85), Q_1 et Q_2 dans (146); les autres variables : p, q , dans (85); Q_3, R_1, R_2, R_3 , dans (146), oscillent chacune de part et d'autre d'une valeur moyenne. Nous avons parlé (*voir* note au n^o 43) des éléments moyens d'une solution quasi-périodique du système (85); il s'agit, en somme, des valeurs moyennes de $\frac{d\zeta}{dt}, \frac{d\lambda}{dt}, p, q$. Pour une solution quasi-périodique (à deux fréquences fondamentales) du système (146), les éléments moyens sont les valeurs moyennes de $\frac{dQ_1}{dt}, \frac{dQ_2}{dt}, Q_3, R_1, R_2, R_3$; ces valeurs moyennes diffèrent de quantités de l'ordre de $\varepsilon e'$ des constantes $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, k_3^{(0)}, \left[\frac{\partial T}{\partial Q_1} \right]_0, \left[\frac{\partial T}{\partial Q_2} \right]_0, \left[\frac{\partial T}{\partial Q_3} \right]_0$, qui sont les éléments moyens du mouvement non troublé ($e' = 0$) au voisinage duquel on se place. Mais, comme nous l'avons dit à propos du système (85), il nous est impossible de déterminer d'une manière exacte les éléments moyens d'une solution quasi-périodique du système (146); nous savons seulement que si nous nous donnons un ensemble de constantes voisines des

(1) Ce ne sont pas là, apparemment, les orbites bipériodiques les plus nombreuses, et d'ailleurs les orbites « non troublées » dans le voisinage desquelles elles se trouvent ne sont peut-être pas arbitraires.

éléments moyens du mouvement non troublé, ces constantes représentent toujours, d'une manière approchée, les éléments moyens d'un mouvement troublé quasi-périodique (voir ce qui a rapport aux constantes β et γ du n° 43).

Toute famille de solutions quasi-périodiques, à deux fréquences fondamentales, des équations (146), est représentable sur un tore, par une famille de « caractéristiques » de Poincaré (n° 40).

La variable Q_1 sera, par exemple, l'angle de la normale au tore en M (point mobile) avec le plan de l'équateur du tore, et la variable Q_2 représentera l'angle que fait le plan méridien du point M avec le plan méridien origine. L'équation différentielle

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{n_1^{(0)}}{n_2^{(0)}} + \varepsilon e' Y(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3)$$

(Y périodique en Q_1 et Q_2 , de période 2π), déduite des deux premières équations (146), définit la famille des caractéristiques du tore qui correspondent aux trajectoires de la famille envisagée de solutions quasi-périodiques; Q_3, R_1, R_2, R_3 sont supposés connus comme fonctions de Q_1, Q_2 et admettent la période 2π par rapport à ces deux variables. *Le « rotation number » est voisin de $\frac{n_1^{(0)}}{n_2^{(0)}}$; son expression approchée s'obtient par la méthode de M. Kryloff (n° 44), sous la forme d'une série divergente asymptotique procédant suivant les puissances de $\varepsilon e'$. Lorsque l'on fait varier e' chaque famille de solutions quasi-périodiques varie d'une manière continue, et le « rotation number » qui caractérise la famille est une fonction continue, mais non analytique, de $\varepsilon e'$, devenant égale à $\frac{n_1^{(0)}}{n_2^{(0)}}$ lorsqu'on fait $e' = 0$. Le « rotation number » prend une valeur rationnelle toutes les fois que e' est compris dans l'un des intervalles appelés « zones de synchronisation » ⁽¹⁾; les solutions quasi-périodiques de la famille dégénèrent alors en un nombre fini de solutions périodiques. L'ensemble des zones de synchronisation est partout dense à cause de la continuité de*

(1) N. KRYLOFF et N. BOGOLIOUBOFF, *Ouvrage cité*, p. 63 et 108.

la fonction $\nu(\varepsilon e')$; si l'on fait varier l'excentricité e' à l'intérieur d'une de ces zones, le « rotation number » conserve une valeur rationnelle constante.

Le raisonnement du n° 46, relatif à la convergence des séries de Fourier qui représentent les coordonnées et leurs dérivées lorsque le mouvement est bipériodique s'applique, bien entendu, à n'importe quel champ de forces; les solutions bipériodiques des systèmes (144), (145), (146) sont donc exprimables au moyen d'agrégats de Gylgén, et, par suite, aussi, les expressions qu'on en déduit pour ρ , z et θ à l'aide des formules (141).

Remarquons enfin que la généralisation des méthodes du Chapitre V (nos 41-44) conduirait à représenter les solutions du système (145) au moyen de séries divergentes asymptotiques possédant la quasi-périodicité formelle avec trois fréquences fondamentales. Parmi ces solutions, il en est évidemment (formant un ensemble de mesure nulle) qui possèdent la quasi-périodicité réelle avec trois fréquences fondamentales voisines des fréquences approchées, c'est-à-dire voisines de a_0 , b_0 , j_0 , mais nous n'avons aucune raison de croire que les trajectoires correspondantes constituent les orbites absolues les plus générales.

77. Retard des nœuds. Extension des résultats du Chapitre VI.

— Laissant de côté les généralités sur les orbites absolues quasi-périodiques, nous nous occuperons maintenant des inégalités séculaires des orbites réelles.

Considérons d'abord les équations différentielles (47) et (48), qui permettent d'étudier les variations de la latitude. Si l'on veut en déduire des expressions de plus en plus approchées de la latitude, il faut associer (47) à (17) et (18), ou bien (48) à (26) et (28), et faire des approximations successives. Mais ce n'est pas là notre but : nous cherchons avant tout des formules analytiques mettant en évidence l'allure des variations des éléments; au point de vue du calcul pratique, nous nous contenterons de la première approximation.

Nous avons donc l'équation

$$(47) \quad \frac{d^2 w}{d\theta^2} + (1 - W)w = -\frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{dw}{d\theta},$$

avec

$$J^2 = C^2 + 2 \int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \quad (\text{voir n}^\circ 7),$$

et

$$W = \frac{r^2}{J^2} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} < 0 \quad (\text{voir n}^\circ 20);$$

et l'équation

$$(48) \quad \frac{d^2 \mu}{dv^2} + (1 - L) \mu = - \frac{r^2}{G^2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\mu}{dv},$$

avec

$$G = \frac{J}{\cos i} \quad (\text{voir n}^\circ 6),$$

et

$$L = \frac{r^2}{G^2} \frac{\cos^2 i}{\sin \varphi \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (\text{voir n}^\circ 20).$$

La transformation

$$\omega = \text{tang } i \sin(\theta - \omega), \quad \frac{d\omega}{d\theta} = \text{tang } i \cos(\theta - \omega)$$

(voir n^o 49), remplace (47) par le système

$$(147) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{d\theta} = W \sin^2(\theta - \omega) - \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega), \\ \frac{1}{\text{tang } i} \frac{d(\text{tang } i)}{d\theta} = W \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega) - \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \cos^2(\theta - \omega). \end{array} \right.$$

De même la transformation

$$\mu = \sin i \sin(\nu - \psi), \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \sin i \cos(\nu - \psi)$$

remplace (48) par le système

$$(148) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{d\nu} = L \sin^2(\nu - \psi) - \frac{r^2}{G^2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin(\nu - \psi) \cos(\nu - \psi), \\ \frac{1}{\sin i} \frac{d(\sin i)}{d\nu} = L \sin(\nu - \psi) \cos(\nu - \psi) - \frac{r^2}{G^2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \cos^2(\nu - \psi). \end{array} \right.$$

Des deux systèmes (147) et (148), un seul suffit pour étudier le déplacement de la ligne des nœuds et les oscillations de l'inclinaison. Le système (148) est plus commode, ainsi que le montre le calcul du n^o 57 dans un cas particulier simple; si l'on veut connaître le déplacement des nœuds dans le plan de l'équateur, on utilisera la première équation (148), bien que la variable indépen-

dante soit ν , puis l'on se servira des formules

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\cos i} \frac{d\psi}{dt} \quad (\text{voir n}^\circ \text{ 57}).$$

Les seconds membres de toutes les équations (147) et (148) sont de l'ordre de ε ; on aura donc, immédiatement, les valeurs de première approximation de $\frac{d\omega}{dt}$, de $\frac{1}{\tan i} \frac{d(\tan i)}{dt}$, de $\frac{d\psi}{d\nu}$, de $\frac{1}{\sin i} \frac{d(\sin i)}{d\nu}$, en remplaçant les quantités des seconds membres par les valeurs qu'elles auraient dans le mouvement elliptique osculateur, valeurs exprimées par rapport à θ ou à ν suivant qu'il s'agit de (147) ou de (148).

La première conséquence de ce fait est que la ligne des nœuds se déplace, en moyenne, dans le sens rétrograde; en effet, dans la première équation (147), la valeur moyenne ⁽¹⁾ du terme

$$- \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega),$$

est négligeable vis-à-vis de celle du terme $W \sin^2(\theta - \omega)$, qui est négative; de même, dans la première équation (148), la valeur moyenne du terme

$$- \frac{r^2}{G^2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin(\nu - \psi) \cos(\nu - \psi)$$

est négligeable vis-à-vis de celle de $L \sin^2(\nu - \psi)$, qui est également négative. Pour obtenir le moyen mouvement de la ligne des nœuds dans le plan de l'équateur (toujours en première approximation), il suffira donc de multiplier la valeur moyenne de $W \sin^2(\theta - \omega)$ par celle de $\frac{d\theta}{dt}$, mais il sera préférable d'opérer de la façon suivante : on calculera le moyen mouvement de la ligne des nœuds dans le plan de Hansen, en multipliant la valeur moyenne de $L \sin^2(\nu - \psi)$ par celle de $\frac{d\nu}{dt}$, à laquelle on peut substituer le moyen mouvement osculateur (n° 57), puis on divisera le moyen mouvement de la

⁽¹⁾ L'expression « valeur moyenne » est prise ici au sens courant de l'Astronomie; c'est, si l'on veut, la valeur moyenne sur une orbite absolue pouvant être substituée pendant un certain temps (assez long) à l'orbite réelle. La même remarque s'applique aux « moyens mouvements » des nœuds et des périhélies.

ligne des nœuds dans le plan de Hansen par le cosinus de l'inclinaison, en application de la formule (1).

Du fait que les seconds membres des équations (147) et (148) sont de l'ordre de ε , on déduit encore des conséquences analogues à celles du n° 53 : *l'inclinaison de l'orbite est soumise à deux sortes d'oscillations : les unes, ayant la durée approximative d'une révolution draconitique, sont de l'ordre de ε ; les autres, ayant une durée beaucoup plus longue, ne font varier l'inclinaison, au cours d'une révolution draconitique, que de quantités de l'ordre de ε^2 , mais leurs effets s'accumulent avec le temps et finissent par produire des variations très sensibles, qui peuvent même devenir importantes.* Si l'inclinaison est différente de zéro à l'instant initial, elle ne peut pas devenir nulle au bout d'un temps fini, mais il est possible, avec des conditions initiales particulières, qu'elle tende vers zéro lorsque le temps croît indéfiniment. Comme, d'autre part, la stabilité de Hill n'existe pas dans les champs de forces actuellement envisagés, il peut arriver, pour certaines conditions initiales, que l'inclinaison prenne des valeurs de plus en plus grandes quand le temps croît, mais elle reste certainement inférieure à 90° s'il ne se produit pas de chocs avec les masses attirantes.

Le mouvement de la ligne des nœuds, nous l'avons vu, est oscillant, avec une vitesse angulaire moyenne négative; la vitesse angulaire vraie s'annule en changeant de signe quand $\sin(\zeta - \omega) = 0$ (nœuds effectifs), et quand $\tan(\theta - \omega) = \frac{1}{WJ} \frac{dJ}{d\theta}$. Les valeurs de θ définies par cette deuxième égalité rendent $\tan i$ stationnaire; les autres valeurs stationnaires de $\tan i$ correspondent à $\cos(\zeta - \omega) = 0$, et sont des minima; il en résulte que les angles $\theta - \omega$ ayant pour tangente $\frac{1}{WJ} \frac{dJ}{d\theta}$ séparent les angles $\theta - \omega = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et donnent des maxima de l'inclinaison; les minima de l'inclinaison ont lieu en même temps que les extrema de φ . Aux valeurs de $\theta - \omega$ qui rendent l'inclinaison stationnaire correspondent des valeurs de $\varphi - \psi$ très aisées à obtenir.

78. Cas des orbites presque circulaires d'inclinaisons très faibles. — Prenons, pour évaluer le déplacement des nœuds, l'exemple suivant : une planète gravite, à grande distance, autour

d'un système stellaire double, dont les composantes décrivent sensiblement deux ellipses inversement homothétiques par rapport à un foyer commun qui est le centre de gravité de leurs masses ⁽¹⁾. L'attraction des deux étoiles sur la planète étant remplacée par celle de deux anneaux elliptiques de Gauss, le potentiel est donné par la formule (38); elle suppose que l'origine des coordonnées est au foyer commun, le plan des anneaux étant pris pour plan xOy .

Posons, pour simplifier,

$$f(m' + m'') = 1, \quad \frac{m' a'^2 + m'' a''^2}{4(m' + m'')} = \varepsilon;$$

nous avons, en négligeant les termes de degré inférieur à -3 par rapport à r ,

$$(149) \quad U = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} \left[1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 e'^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi + \frac{5}{2} \cos^2 \varphi \cos 2\theta \right) \right],$$

d'où

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = - \frac{3\varepsilon \cos \varphi}{r^3} [2 + e'^2 (3 + 5 \cos 2\theta)].$$

Quand l'inclinaison est négligeable, les fonctions W et L peuvent être prises égales à

$$- \frac{3\varepsilon}{G^2 r} (2 + 3 e'^2 + 5 e'^2 \cos 2\theta).$$

Supposons que l'orbite képlérienne osculatrice, à un instant donné, soit circulaire ou presque circulaire, le rayon vecteur ayant pour partie principale (d'ordre zéro par rapport à ε) la constante a . L'orbite troublée sera, elle aussi, presque circulaire, avec un rayon vecteur égal à a plus une quantité variable de l'ordre de ε . En remplaçant r par a , nous avons successivement

$$G^2 = J^2 = C^2 + \frac{15\varepsilon}{a} e'^2 \cos 2\theta,$$

$$\frac{1}{G^2} = \frac{1}{J^2} = \frac{1}{C^2} - \frac{15\varepsilon}{C^3 a} e'^2 \cos 2\theta + \text{termes en } \varepsilon^2,$$

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} = - \frac{15\varepsilon}{C^2 a} e'^2 \sin 2\theta + \text{termes en } \varepsilon^2,$$

(1) Ce problème est celui du mouvement de Neptune en tant qu'il est troublé par Jupiter ou par Saturne; le système stellaire double est alors composé du Soleil et de Jupiter, ou du Soleil et de Saturne.

et la première équation (147) s'écrit, en négligeant ε^2 ,

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{3\varepsilon}{C^2a} [(2+3e'^2+5e'^2\cos 2\theta)\sin^2(\theta-\omega)-5e'^2\sin 2\theta\sin(\theta-\omega)\cos(\theta-\omega)];$$

elle se confond, d'ailleurs, dans le cas présent, avec la première équation (148). La valeur moyenne de $\frac{d\omega}{d\theta}$ est la même, à des quantités près de l'ordre de ε^2 , que si l'on avait

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{3\varepsilon}{C^2a} (2+3e'^2)\sin^2(\theta-\omega),$$

laquelle équation est intégrable (n° 52); mais, en continuant à négliger ε^2 , nous écrirons simplement

$$\text{valeur moyenne de } \frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{3\varepsilon}{2C^2a} (2+3e'^2).$$

Le moyen mouvement ω'_m du nœud est le produit de cette quantité par $\frac{C}{a^2}$ qui représente, à des termes près en ε , le moyen mouvement sidéral

$$\omega'_m = -\frac{3\varepsilon}{2C^2a^3} (2+3e'^2) \quad (\varepsilon^2 \text{ négligé}).$$

En remarquant que la constante a ne diffère de C^2 que par des termes en ε , nous écrirons

$$(150) \quad \omega'_m = -\frac{3\varepsilon}{2C^2} (2+3e'^2) \quad (\varepsilon^2 \text{ négligé}).$$

Cette approximation du moyen mouvement du nœud n'est valable, bien entendu, que pour un temps limité : le temps pendant lequel l'orbite peut être regardée comme suffisamment voisine d'un cercle de rayon a .

79. Extension des résultats du Chapitre VIII. Avance du périhélie quand l'excentricité de la planète, dans son mouvement non troublé, est plus importante que celle de l'anneau perturbateur. — La méthode des n° 69-71 s'applique encore quand les anneaux de Gauss, au lieu d'être circulaires, sont elliptiques.

Il y a lieu, tout d'abord, de faire dans l'équation (26) le changement de variable $s = S + \sigma$, la fonction S étant définie par

l'égalité (73). On obtient une équation de même forme que (66)

$$(151) \quad \frac{d^2 \sigma}{d\nu^2} + (1 - \Psi) \sigma = \Lambda,$$

avec

$$\Psi = \frac{\frac{1}{G^2} \frac{\partial U}{\partial s} - S}{\sigma},$$

et

$$\Lambda = -\frac{d^2 S}{d\nu^2} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\nu} \frac{dS}{d\nu} - \frac{1}{G} \frac{dG}{d\nu} \frac{d\sigma}{d\nu}.$$

L'ordre de grandeur des fonctions Ψ et Λ est celui de ε (n° 25). De plus, la fonction Ψ est positive, pour toute trajectoire d'inclinaison nulle, lorsque l'excentricité de l'anneau de Gauss perturbateur est nulle (n° 27); on en déduit, par continuité, que la fonction Ψ reste positive tant que l'inclinaison de la trajectoire ne dépasse pas une certaine limite et pourvu que l'anneau de Gauss n'ait pas une excentricité trop forte.

Supposons que Ψ et Λ soient connus comme fonctions de ν (cela est pratiquement impossible, mais étant donné que Ψ et Λ sont de l'ordre de ε , on aura leurs expressions approchées, avec des erreurs de l'ordre de ε^2 , en remplaçant s , $\frac{ds}{d\nu}$, φ , $\frac{d\varphi}{d\nu}$, θ , $\frac{d\theta}{d\nu}$, qui figurent dans Ψ et Λ , par leurs valeurs du mouvement képlérien elliptique). La solution $\sigma(\nu)$ de l'équation (151) répondant aux conditions initiales du problème est la somme : 1° d'une intégrale particulière de l'équation

$$(152) \quad \frac{d^2 \sigma}{d\nu^2} + [1 - \Psi(\nu)] \sigma = \Lambda(\nu),$$

intégrale que nous pouvons déterminer à notre gré, et 2° d'une intégrale particulière de l'équation sans second membre

$$(153) \quad \frac{d^2 \sigma}{d\nu^2} + [1 - \Psi(\nu)] \sigma = 0,$$

intégrale qui est fixée par le choix de la précédente.

Quand le champ de forces est de révolution autour de Oz , la fonction Λ , abstraction faite du terme $-\frac{1}{G} \frac{dG}{d\nu} \frac{d\sigma}{d\nu}$ accomplit sensi-

blement deux oscillations d'allure sinusoïdale au cours d'une révolution draconitique (voir n° 69) et l'équation (152) est comparable à

$$(154) \quad \frac{d^2 \sigma}{dv^2} + [1 - \varepsilon F(v)] \sigma = k \varepsilon \cos 2v,$$

qui admet l'intégrale particulière

$$\sigma = -\frac{1}{3} k \varepsilon \cos 2v + \text{termes en } \varepsilon^2;$$

il ressort, d'ailleurs, du n° 69, que la présence du terme $-\frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{d\sigma}{dv}$ dans la fonction Λ n'influe pas sur l'ordre de grandeur de l'intégrale particulière de (152) qui correspond à l'intégrale particulière ci-dessus de (154). Autrement dit, dans les champs de gravitation dont les anneaux de Gauss sont circulaires, on peut trouver une intégrale particulière de (152) qui soit de l'ordre de ε . Il n'en est plus ainsi, en général, quand les anneaux de Gauss sont elliptiques. Considérons, en effet, le premier terme de la fonction Λ , qui est $-\frac{d^2 S}{dv^2}$. Le potentiel U étant une fonction périodique de θ , de période 2π , la même propriété de périodicité appartient à la fonction S , d'après l'égalité

$$(73) \quad S = \frac{1}{G^2} \frac{\partial U(S, \theta, \sin^2 \varphi)}{\partial S},$$

et sans avoir égard au développement de G^2 . Comme toutefois nous sommes obligés de former une expression approchée de $\frac{d^2 S}{dv^2}$ en fonction de v , nous admettrons que les termes les plus importants de

$$G^2 = \frac{1}{\cos^2 i} \left(G^2 + 2 \int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \right)$$

s'obtiennent en faisant

$$i = \text{const.}, \quad r = \text{const.}, \quad \omega = \text{const.},$$

et

$$\varphi^2 = r^2 \cos^2 i \frac{1 + \tan^2(\theta - \omega)}{\cos^2 i + \tan^2(\theta - \omega)}$$

(se reporter aux formules du n° 3). Le remplacement de r par une constante pour obtenir les termes les plus importants de G^2

implique que *l'excentricité de l'orbite osculatrice n'est pas forte*; quant aux autres conventions, elles sont légitimes pour le calcul des inégalités du premier ordre, et nous les avons faites, à plusieurs reprises, dans les chapitres antérieurs. La quantité G^2 est ainsi assimilée à une fonction périodique de θ , de période 2π , d'où il résulte que S , avec cette expression de G^2 , est encore une fonction périodique de θ , de période 2π . Or, nous pouvons écrire, en désignant par c une constante positive, la formule approchée suivante (cf. nos 50 et 53) :

$$\theta = \left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}\right) \nu + \text{fonction quasi-périodique de } \nu.$$

Cette formule, substituée dans l'expression périodique $S(\theta)$, donnera une représentation de $S(\nu)$, avec une approximation plus étroite que celle qui consisterait à remplacer θ par son expression du mouvement képlérien elliptique. Le développement approché de $\frac{d^2 S}{d\nu^2}$ comportera, par conséquent, un terme en

$$\cos \left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}\right) \nu,$$

et un terme en $\sin \left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}\right) \nu$, tous deux avec des coefficients de l'ordre de ε puisque $\frac{d^2 S}{d\nu^2}$ est de l'ordre de ε . L'équation (152) n'est plus comparable, dans ce cas, à (154), mais, au contraire, à

$$(155) \quad \frac{d^2 \sigma}{d\nu^2} + [1 - \varepsilon F(\nu)] \sigma = k\varepsilon \cos \left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}\right) \nu,$$

$[F(\nu)$ périodique, de valeur moyenne $F_0]$, qui admet l'intégrale particulière suivante, *d'ordre zéro en ε* ,

$$\sigma = \frac{k}{4c \sin^2 \frac{i}{2} - F_0} \cos \left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}\right) \nu + \text{termes en } \varepsilon,$$

et n'admet pas d'intégrale restant constamment de l'ordre de ε . Remarquons, d'autre part, que les termes en $\cos \theta$ et $\sin \theta$ du développement de S , d'après (73), ont des coefficients contenant en

facteurs ε et ε' ; il en est de même des termes en

$$\cos\left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}\right) \nu \quad \text{et} \quad \sin\left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}\right) \nu,$$

du développement approché périodique de S , d'où il découle que $\frac{d^2 S}{d\nu^2}$ contient en facteur $\varepsilon \varepsilon'$. Nous aurons par conséquent une intégrale particulière de (152) analogue à l'intégrale particulière ci-dessus de (155) et du même ordre de grandeur que ε' ⁽¹⁾. Cette intégrale correspond à l'excentricité forcée de l'orbite, c'est-à-dire à l'accroissement algébrique d'excentricité qui est dû à l'ellipticité de l'anneau perturbateur. Pour obtenir la solution de (151) qui représente σ dans un mouvement déterminé, il faut ajouter à l'intégrale précédente une certaine intégrale de l'équation (153) qui tiendra compte, évidemment, de l'excentricité propre, autrement dit de l'excentricité indépendante de la partie $\varepsilon' \Omega'$ de la fonction perturbatrice. L'ordre de grandeur de cette deuxième intégrale sera celui de l'excentricité propre.

Admettons maintenant que l'intégrale σ_2 de (153), où intervient principalement l'excentricité propre, soit prépondérante sur l'intégrale σ_1 de (152) dont la partie principale est due à l'excentricité forcée. Appliquons à σ_1 et σ_2 les transformations

$$\sigma_1 = X \cos(\nu - \alpha), \quad \frac{d\sigma_1}{d\nu} = -X \sin(\nu - \alpha) \quad (X > 0),$$

$$\sigma_2 = Y \cos(\nu - \varpi), \quad \frac{d\sigma_2}{d\nu} = -Y \sin(\nu - \varpi) \quad (Y > 0),$$

et à σ , solution de (151), la transformation

$$\sigma = \Pi \cos(\nu - \chi), \quad \frac{d\sigma}{d\nu} = -\Pi \sin(\nu - \chi) \quad (\Pi > 0).$$

En étendant les raisonnements du n° 66 au cas qui nous occupe, nous voyons qu'il y a un seul zéro de σ entre deux apsides consécutives ⁽²⁾ et que χ peut être considéré, d'une manière approchée,

⁽¹⁾ Cet ordre de grandeur est au moins égal à celui de $\sqrt{\varepsilon}$, sans quoi l'anneau de Gauss devrait être assimilé à une circonférence (convention du n° 75).

⁽²⁾ En effet, moyennant les conventions des nos 70 et 75, les fonctions S et s ne peuvent devenir égales qu'entre les apsides, et si l'égalité avait lieu plus d'une

comme un argument isocinétique avec la longitude orbitale du périastre. Or, si nous écrivons les égalités

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{d\sigma_1}{d\nu} + \frac{d\sigma_2}{d\nu},$$

nous en déduisons les égalités équivalentes

$$(156) \quad \begin{cases} \Pi \cos \chi = X \cos \varkappa + Y \cos \varpi, \\ \Pi \sin \chi = X \sin \varkappa + Y \sin \varpi, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Pi \cos(\chi - \varpi) &= X \cos(\varkappa - \varpi) + Y, \\ \Pi \sin(\chi - \varpi) &= X \sin(\varkappa - \varpi). \end{aligned}$$

Y étant, par hypothèse, supérieur à X, $\cos(\chi - \varpi)$ ne peut jamais s'annuler; le *moyen mouvement de la ligne des apsides est donc le même que si la longitude orbitale du périastre était ϖ* .

Ainsi, lorsque les oscillations du rayon vecteur dues à l'excentricité propre sont plus importantes que celles dues à l'excentricité forcée, le moyen mouvement de la ligne des apsides résulte de l'équation

$$\frac{d\varpi}{d\nu} = \Psi \cos^2(\nu - \varpi),$$

déduite de (153) au moyen de la transformation en Y et ϖ . Comme la fonction Ψ est positive pour les latitudes ne dépassant pas une certaine limite, le déplacement des apsides s'effectue, en moyenne, dans le sens direct, tant que cette limite n'est pas atteinte, mais la valeur moyenne de Ψ est encore positive jusqu'à une limite plus élevée, et, par suite, aussi, le moyen mouvement des apsides.

Soit Ψ_m la valeur moyenne de Ψ , calculée en substituant dans Ψ les formules du mouvement elliptique; n désignant le moyen mouvement osculateur, on a, avec une erreur de l'ordre de ε^2

$$\text{moyen mouvement orbital du périastre} = n \frac{\Psi_m}{2}.$$

fois entre deux apsides consécutives, il en serait encore ainsi pour $e' = 0$, ce qui est impossible.

80. **Libration possible du périhélie quand l'excentricité propre de la planète est aussi faible ou plus faible que l'excentricité de l'anneau perturbateur.** — Les résultats ne sont plus les mêmes si l'on suppose que σ_1 l'emporte sur σ_2 , ce qui se traduit par $X > Y$.

En effet, les formules (156) pouvant être remplacées par

$$\Pi \cos(\chi - \alpha) = X + Y \cos(\varpi - \alpha),$$

$$\Pi \sin(\chi - \alpha) = Y \sin(\varpi - \alpha),$$

on voit immédiatement que $\cos(\chi - \alpha)$ ne peut pas s'annuler, et qu'on a, par suite, le même mouvement moyen de la ligne des apsides que si la longitude orbitale du périastre était α . Mais l'intégrale particulière $\sigma_1 = X \cos(\nu - \alpha)$ de l'équation (152) se réduit à une forme approchée simple, qui découle de l'analogie entre les équations (152) et (155). On doit avoir

$$\sigma_1 = X \cos(\nu - \alpha) = K e' \cos \left[\left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2} \right) \nu - \alpha \right] + \text{termes en } \varepsilon,$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\nu} = -X \sin(\nu - \alpha) = -K e' \sin \left[\left(1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2} \right) \nu - \alpha \right] + \text{termes en } \varepsilon,$$

K et α étant deux constantes; on sait, du reste, que la variation de X , comme celle de Y ou de Π , est de l'ordre de ε , avec l'allure d'une courbe périodique si l'on néglige ε^2 . Les relations ci-dessus expriment que

$$X = K e' + \text{termes en } \varepsilon,$$

$$\alpha = \left(2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2} \right) \nu + \alpha + \text{termes en } \varepsilon \quad (\text{à un multiple près de } 2\pi),$$

et les termes en ε indiquent simplement des oscillations de part et d'autre d'une valeur moyenne, ε^2 étant négligé. Il y a donc, en moyenne, un passage au périastre pour tout accroissement de ν égal à $\frac{2\pi}{1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}}$, et cela s'interprète d'une manière remarquable

en prenant θ au lieu de ν comme variable angulaire. A l'accroissement $\frac{2\pi}{1 - 2c\varepsilon \sin^2 \frac{i}{2}}$ de l'angle ν correspond un accroissement

moyen de θ égal à 2π (voir le numéro précédent); cela veut dire

que le mouvement de la ligne des apsides, rapporté au plan de l'équateur, est un mouvement de libration ⁽¹⁾.

Comme conséquence de ce qui précède, si l'on considère des orbites dont l'inclinaison n'atteint pas de trop grandes valeurs dans des champs de forces comportant des anneaux de Gauss dont l'excentricité n'est pas trop forte (hypothèse déjà faite pour les orbites), le moyen mouvement des apsides (relativement au plan de l'équateur) est positif ou nul suivant que X est inférieur ou supérieur à Y . Son signe paraît plus compliqué à déterminer lorsque X est égal à Y (égalité à des quantités près de l'ordre de ϵ), mais comme ce cas a extrêmement peu de chances de se produire, nous le laisserons de côté.

Le Verrier ⁽²⁾ donne pour l'année 1850, et Newcomb ⁽³⁾ pour les années 1600, 1850, 2100, les valeurs des déplacements du périhélie de chaque planète sous l'influence des autres planètes considérées séparément. La méthode employée par ces auteurs est celle qui consiste à développer les inégalités séculaires suivant les puissances du temps, et il se trouve que *les actions de Mercure sur les périhélies de Vénus et de la Terre, de la Terre sur le périhélie de Vénus, et de Saturne sur le périhélie de Neptune sont actuellement des retards. D'après ce que nous venons de voir, nous devons penser que cette rétrogradation est temporaire* ⁽⁴⁾, bien qu'elle s'étende sur un certain nombre de siècles; il arrivera un moment, semble-t-il, où la vitesse du mouvement apsidal s'annulera, puis deviendra positive, et le déplacement direct qui aura lieu à ces époques futures compensera le déplacement rétrograde des époques actuelles. Plus tard encore, le déplacement deviendra de nouveau rétrograde et ainsi de suite. Notons que dans les quatre cas signalés, l'excentricité de la planète troublée est inférieure à celle de la planète troublante, mais l'excentricité n'est pas le seul élément en cause : le grand axe joue aussi un certain rôle. Notons encore que toutes les librations d'apsides ne sont pas actuellement

(1) Ce résultat n'est soumis à aucune restriction provenant de l'inclinaison de l'orbite ou de l'excentricité de l'anneau de Gauss.

(2) *Ann. Obs. Paris, Mém.*, t. II, 1856, p. 100-102.

(3) *Astronomical Papers*, vol. V, 1895, p. 375-378.

(4) Comme la diminution ou l'augmentation des excentricités et des inclinaisons des planètes.

marquées par des retards; le périhélie de Neptune, par exemple, subit une avance sous l'action de Jupiter, et la valeur très faible de cette avance est l'indice d'une libration.

81. **Application aux orbites d'inclinaison nulle et d'excentricité très faible.** — Reprenons le potentiel (149), qui se rapporte à l'action d'une planète quelconque sur une autre planète relativement lointaine. Si l'orbite de cette dernière est très peu excentrique, et si l'inclinaison est nulle, le rayon vecteur reste voisin de C^2 . La fonction Ψ a pour expression approchée, dans le plan de l'équateur,

$$\Psi = \frac{3\varepsilon}{J^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{J^2} \right) \left[1 + 3e'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos 2\theta \right) \right]$$

(voir n° 28), et pour une orbite presque circulaire, on peut réduire cette expression à la suivante :

$$\Psi = \frac{6\varepsilon}{C^4} \left[1 + 3e'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos 2\theta \right) \right].$$

On a, d'ailleurs, au même degré d'approximation,

$$\frac{1}{J^2} = \frac{1}{C^2} - 2 \int \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{C^2} - \frac{15\varepsilon e'^2}{C^6} \cos 2\theta$$

et

$$S = \frac{1}{C^2} + \frac{3\varepsilon}{C^6} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 + \frac{5}{2} e'^2 \cos 2\theta \right)$$

(voir le même numéro). Le moyen mouvement du périhélie résulte de l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \sigma}{d\theta^2} + (1 - \Psi) \sigma = - \frac{d^2 S}{d\theta^2},$$

dans le second membre de laquelle nous avons omis les termes contenant en facteur le produit de ε par l'excentricité de l'orbite. σ est la somme de deux fonctions σ_1 et σ_2 , telles que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_1}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{6\varepsilon}{C^4} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 + \frac{15}{2} e'^2 \cos 2\theta \right) \right] \sigma_1 \\ = \frac{30\varepsilon}{C^6} e'^2 \cos 2\theta + \text{termes d'ordre plus élevé,} \end{aligned}$$

et

$$\frac{d^2 \sigma_2}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{6\varepsilon}{C^4} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 + \frac{15}{2} e'^2 \cos 2\theta \right) \right] \sigma_2 = 0.$$

Nous avons immédiatement

$$\sigma_2 = A \cos \left[\left(1 - \frac{3\varepsilon}{C^4} - \frac{9\varepsilon e'^2}{2C^4} + \dots \right) \theta + \alpha \right] + \dots,$$

A, α , constantes; les termes non écrits sont négligeables.

En supposant les oscillations de σ_2 plus importantes que celles de σ_1 , le moyen mouvement approché du périhélie est égal au produit de $\frac{3\varepsilon}{C^4} + \frac{9\varepsilon e'^2}{2C^4}$, par $\frac{1}{C^3}$ qui représente approximativement la vitesse angulaire moyenne de la planète

$$(157) \quad \chi'_m = \frac{3\varepsilon}{2C^7} (2 + 3e'^2) \quad (1).$$

Mais, nous ne sommes pas à même de juger si l'effet de σ_2 l'emporte sur celui de σ_1 , car nous avons d'une part remplacé r par une constante pour calculer S, Λ et Ψ , et d'autre part nous avons réduit le potentiel réel du champ de forces à la forme approchée

$$U = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} \left[1 + 3e'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos 2\theta \right) \right],$$

supprimant ainsi des termes en $\sin \theta$ ou $\cos \theta$ qui, bien qu'ils soient faibles par rapport aux termes écrits, donnent naissance à des termes importants dans la fonction σ_4 . On le constate, du reste, facilement, car l'équation

$$\frac{d^2 \sigma_1}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{6\varepsilon}{C^4} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 + \frac{15}{2} e'^2 \cos 2\theta \right) \right] \sigma_1 = \frac{30\varepsilon e'^2}{C^6} \cos 2\theta$$

admet comme intégrale particulière

$$\sigma_1 = -\frac{10\varepsilon}{C^6} e'^2 \cos 2\theta + \dots,$$

tandis que l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_1}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{6\varepsilon}{C^4} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 + \frac{15}{2} e'^2 \cos 2\theta \right) \right] \sigma_1 \\ = \frac{30\varepsilon e'^2}{C^6} \cos 2\theta + K\varepsilon \sqrt{\varepsilon} e' \cos \theta, \end{aligned}$$

(1) La comparaison de (157) avec (150) fournit une nouvelle vérification de la loi de M. Chazy (n° 67).

avec un terme en $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}e'\cos\theta$ dans le second membre, admet l'intégrale particulière

$$\sigma_1 = -\frac{10\varepsilon}{C^6}e'^2\cos 2\theta - \frac{K\sqrt{\varepsilon}C^4}{6+9e'^2}e'\cos\theta + \dots,$$

qui peut être plus importante que σ_2 , car la constante A qui figure dans σ_2 est très faible (comparable à $\sqrt{\varepsilon}$).

Il nous est donc impossible, en ne conservant que les termes en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^3}$ du potentiel et en négligeant l'excentricité de l'orbite, de dire s'il y a révolution ou libration du périhélie.

L'exemple qui va suivre nous mènera, au contraire, à une conclusion plus précise.

82. Déplacements des périhélies des astéroïdes sous l'action de Jupiter. — Considérons une petite planète du système solaire, telle que sa distance moyenne au Soleil soit inférieure à celle de Jupiter sans être trop voisine de cette dernière ⁽¹⁾. Supposons qu'il n'y ait pas de commensurabilité approchée, avec un rapport simple, entre le moyen mouvement de la petite planète et celui de Jupiter (n° 13, 3°). Négligeons l'inclinaison de l'orbite de la petite planète et essayons de nous rendre compte de l'influence de Jupiter sur la position de ses apsides. *M désignant la masse du Soleil, m celle de Jupiter*, il y a lieu de prendre comme potentiel, en vue du calcul des inégalités séculaires, la somme de $\frac{f(M+m)}{r}$ (potentiel central) et du potentiel de l'anneau de Gauss relatif à Jupiter.

Le périhélie de Jupiter étant supposé sur la partie positive de O*x*, le potentiel de l'anneau de Gauss est (n° 18)

$$\frac{fm}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{n' dt}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta' - \theta)}},$$

où n' est le moyen mouvement de Jupiter, r' et θ' les coordonnées d'un point de son orbite.

(1) Les planètes troyennes, en particulier, sont exclues de cette étude.

En désignant par a' le demi-grand axe de l'orbite de Jupiter autour du Soleil, et par e' son excentricité, nous avons

$$r' = \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e' \cos \theta'},$$

comme équation de l'anneau, et

$$\frac{(1 - e'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e' \cos \theta')^2} d\theta' = n' dt,$$

comme loi de son parcours.

Développons le potentiel de l'anneau suivant les puissances de e' ; pour calculer les termes du premier degré, nous pouvons poser

$$r' = \frac{a}{1 + e' \cos \theta'}, \quad \frac{d\theta'}{1 + 2e' \cos \theta'} = n' dt,$$

et nous avons à évaluer l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - 2e' \cos \theta') d\theta'}{\sqrt{r^2 + a'^2(1 - 2e' \cos \theta') - 2ra'(1 - e' \cos \theta') \cos(\theta' - \theta)}}.$$

Si l'on s'en tient aux termes du premier degré en e' , l'élément différentiel est égal au produit de $(1 - 2e' \cos \theta')$ $d\theta'$ par

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2ra' \cos(\theta' - \theta)}} + \frac{a' e' \cos \theta' [a' - r \cos(\theta' - \theta)]}{[r^2 + a'^2 - 2ra' \cos(\theta' - \theta)]^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire, avec la même approximation, à

$$\frac{d\theta'}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2ra' \cos(\theta' - \theta)}} - \frac{[2r^2 + a'^2 - 3ra' \cos(\theta' - \theta)] e' \cos \theta' d\theta'}{[r^2 + a'^2 - 2ra' \cos(\theta' - \theta)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Prenons comme nouvelle variable d'intégration $\lambda = \theta' - \theta$; nous aurons, à la place de l'intégrale précédente, la somme des trois intégrales ci-après :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\theta+2\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2ra' \cos \lambda}} \\ & - e' \cos \theta \int_0^{\theta+2\pi} \frac{2r^2 + a'^2 - 3ra' \cos \lambda}{(r^2 + a'^2 - 2ra' \cos \lambda)^{\frac{3}{2}}} \cos \lambda d\lambda \\ & + e' \sin \theta \int_0^{\theta+2\pi} \frac{2r^2 + a'^2 - 3ra' \cos \lambda}{(r^2 + a'^2 - 2ra' \cos \lambda)^{\frac{3}{2}}} \sin \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Les trois fonctions à intégrer étant périodiques de période 2π , on peut remplacer les limites d'intégration θ et $\theta + 2\pi$ par 0 et 2π .

Le produit de la première intégrale par $\frac{fm}{2\pi}$ représente le potentiel d'un anneau circulaire homogène de masse m , de centre O, de rayon a' ; nous représenterons ce produit par $fm U_0(r)$. La deuxième intégrale, multipliée par $\frac{fm}{2\pi}$, constitue un terme correctif dû à l'excentricité de Jupiter, terme que nous écrirons $-fme' \cos \theta U_1(r)$. Quant à la troisième intégrale, elle est nulle, car les éléments différentiels symétriques par rapport à $\lambda = 0$ se détruisent. Le potentiel produit par l'anneau jovien s'écrit donc

$$fm[U_0(r) - U_1(r)e' \cos \theta + \text{termes en } e'^2 + \dots] \quad (1).$$

Posons maintenant

$$\frac{m}{M+m} = \varepsilon,$$

et faisons un choix d'unités (n° 14) tel que

$$f(M+m) = 1,$$

nous aurons comme potentiel total

$$(158) \quad U = \frac{1}{r} + \varepsilon [U_0(r) - U_1(r)e' \cos \theta + \dots].$$

L'excentricité jovienne est petite (0,048), mais le rapport de la masse de Jupiter à celle du Soleil est beaucoup plus petit (0,00095); c'est pourquoi nous regarderons e' comme étant du premier ordre de petitesse, et ε comme étant du second ordre. Les termes de U seront négligés à partir du quatrième ordre, d'après la convention du n° 73; il est donc inutile de pousser le développement du potentiel au delà des termes qui sont écrits dans (158).

Pour arriver à déterminer le mouvement séculaire de la ligne des apsides, nous exprimerons d'abord la fonction S , définie par

(1) U_0 et U_1 sont développables en séries convergentes suivant les puissances de $\frac{r}{a'}$. On abrégera le développement de U_1 en utilisant l'identité

$$2\pi U_1(r) : \int_0^{2\pi} \frac{\cos \lambda \, d\lambda}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2ra' \cos \lambda}} - r \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos \lambda \, d\lambda}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2ra' \cos \lambda}} \right].$$

l'égalité (73) qui s'écrit ici

$$S = \frac{1}{C^2 + 2 \int r^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta} \frac{\partial U(S, \theta)}{\partial S};$$

$U(S, \theta)$ désigne l'expression de U lorsque r est remplacé par $\frac{1}{S}$

$$\frac{\partial U(S, \theta)}{\partial S} = 1 + \varepsilon \left[\frac{dU_0(S)}{dS} - \frac{dU_1(S)}{dS} e' \cos \theta \right].$$

Pour évaluer l'intégrale $\int r^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$, nous regarderons l'excentricité propre de la petite planète comme étant du même ordre que celle de Jupiter, c'est-à-dire du premier ordre. Nous voyons alors que nous pouvons la négliger, puisque $\frac{\partial U}{\partial \theta}$, contenant en facteur $\varepsilon e'$, se trouve être du troisième ordre. De cette façon (1)

$$\int r^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = -\varepsilon e' a^2 U_1(a) \cos \theta,$$

a étant le demi-grand axe du mouvement elliptique osculateur de la petite planète. Il s'ensuit

$$S = \frac{1}{C^2} + \varepsilon (L_0 - L_1 e' \cos \theta) + \text{termes négligeables};$$

L_0 et L_1 sont des constantes qu'il est inutile d'expliciter. Nous avons après cela

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{J^2} \frac{\frac{\partial U(s, \theta)}{\partial s} - \frac{\partial U(S, \theta)}{\partial S}}{s - S} \\ &= \frac{\varepsilon}{J^2} \frac{\frac{dU_0(s)}{ds} - \frac{dU_0(S)}{dS}}{s - S} - \frac{\varepsilon e' \cos \theta}{J^2} \frac{\frac{dU_1(s)}{ds} - \frac{dU_1(S)}{dS}}{s - S}, \end{aligned}$$

ce qui donne une expression de la forme

$$\Psi = \varepsilon [\Psi_0(s) + e' \Psi_1(s) \cos \theta] + \text{termes négligeables}.$$

Constatons, avant d'appliquer à notre problème l'équation (151),

(1) Voir la remarque du n° 7 au sujet de l'intégrale $\int e^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$.

que les termes $-\frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{dS}{d\theta}$, $-\frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} \frac{d\sigma}{d\theta}$, qui doivent figurer dans le second membre, sont négligeables en vertu des hypothèses faites : l'équation (151) se réduit donc à

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + (1 - \Psi^*)\sigma = -\frac{d^2S}{d\theta^2},$$

ou

$$(159) \quad \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + [1 - \varepsilon \Psi_0(s) - \varepsilon e' \Psi_1(s) \cos \theta] \sigma = -\varepsilon e' L_1 \cos \theta.$$

En supposant s connu, elle admet l'intégrale particulière

$$\sigma_1 = \frac{L_1}{\Psi_{m,0}^*} e' \cos \theta + \text{termes en } \varepsilon + \dots,$$

où $\Psi_{m,0}$ représente la valeur moyenne de $\Psi_0(s)$: si l'on néglige dans σ les termes de l'ordre de ε (second ordre), $\Psi_{m,0}$ dépend seulement de a . La solution de (159) qui correspond aux conditions réelles du problème est la somme de cette intégrale particulière et d'une intégrale de l'équation sans second membre. Nous avons, par conséquent

$$(160) \quad \sigma = \frac{L_1}{\Psi_{m,0}^*} e' \cos \theta + A \cos \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0}^* \right) \theta + k \right] + \text{termes en } \varepsilon + \dots$$

A et k sont des constantes, A étant de l'ordre de grandeur de l'excentricité propre. Ayant uniquement en vue le déplacement des apsides, il nous suffit de conserver dans σ les termes les plus importants, dont nous avons à comparer les oscillations. Négligeons donc les termes en ε , et considérons $\Psi_{m,0}$ comme une fonction de a seul. A dépend aussi de a , et L_1 dépend de a et de C^2 , mais la différence $a - C^2$ étant de l'ordre de ε , on peut considérer L_1 comme une fonction de a seul.

Si l'on ne tenait pas compte de l'action de Jupiter, la constante A serait égale au produit de $\frac{1}{a}$ par l'excentricité de la petite planète. Comme nous négligeons, dans σ , les termes en ε , admettons encore cette égalité dans le mouvement troublé

$$A = \frac{\eta}{a} \quad (\eta, \text{ excentricité propre}),$$

ceci sans tenir compte de l'excentricité jovienne. Enfin appliquons

à σ la transformation (122)

$$\sigma = \Pi \cos(\theta - \chi), \quad \frac{d\sigma}{dv} = -\Pi \sin(\theta - \chi) \quad (\Pi > 0).$$

A des quantités près de l'ordre de ε , Π est égal au produit de $\frac{1}{a}$ par l'excentricité de l'orbite osculatrice

$$\Pi = \frac{e}{a}.$$

Il résulte de tout cela que les termes les plus importants de (160) donnent lieu à l'égalité

$$e \cos(\theta - \chi) = \frac{a L_1}{\Psi_{m,0}^*} e' \cos \theta + \eta \cos \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0} \right) \theta + k \right].$$

De même les termes les plus importants de la formule qu'on obtient en dérivant (160) donnent

$$e \sin(\theta - \chi) = \frac{a L_1}{\Psi_{m,0}^*} e' \sin \theta + \eta \sin \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0} \right) \theta + k \right],$$

et l'ensemble de ces deux égalités est équivalent à

$$(161) \quad \begin{cases} e \cos \chi = \frac{a L_1}{\Psi_{m,0}^*} e' + \eta \cos \left(\frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0} \theta - k \right), \\ e \sin \chi = \eta \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0} \theta - k \right). \end{cases}$$

L'argument χ représente, à des termes près en ε , que nous négligeons, la longitude du périhélie. Sa variation moyenne découle immédiatement de la première équation (161) pourvu que la différence entre $\frac{a L_1}{\Psi_{m,0}^*} e'$ et η ne soit pas petite comme ε :

1° Si l'on a $\eta > \frac{a L_1}{\Psi_{m,0}^*} e'$, l'argument χ possède la même vitesse moyenne que l'argument $\frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0} \theta$ (cf. n° 79), et cette vitesse moyenne est positive puisque $\Psi_{m,0}$ est positif; le périhélie se déplace, en moyenne, dans le sens direct; sa vitesse angulaire moyenne est égale au produit de $\frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0}$ par le moyen mouvement osculateur, avec une erreur de l'ordre de ε^2 .

2° Si l'on a $\eta < \frac{\alpha L_1}{\Psi_{m,0}} e'$, $\cos \chi$ ne peut pas s'annuler, et la vitesse moyenne de l'argument χ est nulle (cf. n° 80); la ligne des apsides est soumise à une libration de part et d'autre de l'axe Ox , c'est-à-dire de part et d'autre du grand axe de l'orbite de Jupiter.

La comparaison s'impose des formules (161) avec les formules que donne la méthode classique de Lagrange quand on l'applique au mouvement d'un astéroïde troublé par Jupiter ⁽¹⁾. Ces dernières sont

$$(162) \quad \begin{cases} e \cos \chi = h e' + \tau_1 \cos(ft + \beta), \\ e \sin \chi = \tau_1 \sin(ft + \beta), \end{cases}$$

en prenant la longitude du périhélie de Jupiter égale à zéro; β , τ_1 , h , f sont des constantes ayant une signification évidente: τ_1 est l'excentricité propre ⁽²⁾; h n'est autre que le coefficient $\frac{\alpha L_1}{\Psi_{m,0}}$ de e' dans (161); f est le produit de $\frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0}$ par le moyen mouvement osculateur, et β dépend de l'origine du temps.

La constante $\frac{\alpha L_1}{\Psi_{m,0}} = h$ (égalité à des termes près en ε) est, d'après ce que nous avons vu, une fonction de α seul. Un calcul complet basé sur les développements de U_0 et U_1 (158), conduirait à l'expression suivante connue par la méthode de Lagrange, et

⁽¹⁾ K. HIRAYAMA, *Ann. Obs. astr. Tokyo*, append. 6, juin 1918, et append. 11, janv. 1923.

⁽²⁾ M. HIRAYAMA introduit aussi l'*inclinaison propre*: c'est l'inclinaison de l'orbite de l'astéroïde sur celle de Jupiter, cette dernière étant supposée par lui différente de zéro. En traitant l'inclinaison propre I et l'inclinaison i' de Jupiter comme des quantités du premier ordre de petitesse, et en négligeant les termes du second ordre, on arrive aux formules suivantes, analogues à (162) et faciles à retrouver géométriquement si l'on s'appuie sur les résultats du n° 77

$$\begin{cases} \tan i \cos \lambda = \tan i' + \tan I \cos(-ft + \alpha), \\ \tan i \sin \lambda = \tan I \sin(-ft + \alpha); \end{cases}$$

λ désigne la longitude du nœud de l'astéroïde par rapport au plan xOy ; la longitude du nœud de Jupiter est prise égale à zéro. Le mouvement de la nouvelle ligne des nœuds est une libration lorsque $I < i'$. S'il y a à la fois révolution des nœuds et des apsides, les moyens mouvements respectifs sont $-f$ et $+f$, dont la somme est zéro; nous vérifions ainsi, une fois de plus, la loi de M. Chazy (n° 67).

dans laquelle a' désigne le demi-grand axe de l'orbite de Jupiter

$$\frac{\alpha L_1}{\Psi_{m,0}} = h = \frac{5}{4} \frac{a}{a'} \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{7}{6} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \frac{3.5}{2.4} \frac{7.9}{6.8} \left(\frac{a}{a'}\right)^4 + \dots}{1 + \frac{3}{2} \frac{5}{4} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \frac{3.5}{2.4} \frac{5.7}{4.6} \left(\frac{a}{a'}\right)^4 + \dots}.$$

Quant à la constante $\frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0}$, fonction de a , elle aussi, nous avons

$$\frac{\varepsilon}{2} \Psi_{m,0} = \frac{f}{n} = \frac{3\varepsilon}{4} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{5}{4} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \frac{3.5}{2.4} \frac{5.7}{4.6} \left(\frac{a}{a'}\right)^4 + \dots \right].$$

Nous pouvons d'ailleurs introduire dans ces expressions, au lieu des demi-grands axes a, a' , les moyens mouvements n, n' , qui leur sont liés par la troisième loi de Képler

$$n^2 a^3 = n'^2 a'^3 = 1.$$

Il est intéressant de constater que le principe de Lagrange et le principe de Gauss pour le calcul des inégalités séculaires, principes qui sont essentiellement différents l'un de l'autre, conduisent, dans le cas du problème astéroïdal, à des formules pratiquement identiques. De plus, la méthode que nous avons élaborée, basée sur le principe de Gauss, permet de négliger, au début même des calculs, les carrés et les produits des excentricités. Au contraire, avec la méthode de Lagrange, il faut conserver, dans la fonction perturbatrice, les termes du second ordre en e et e' .

Pour achever d'interpréter les formules (161) ⁽¹⁾, remarquons que la constante $\frac{\alpha L_1}{\Psi_{m,0}} = h$ est positive. Donc, s'il y a libration de la ligne des apsides, $\cos \chi$ reste positif. Autrement dit, *le périhélie de l'astéroïde (et non l'aphélie) oscille de part et d'autre du périhélie de Jupiter*, dont la longitude est supposée nulle.

Le nombre des astéroïdes présentant la libration du périhélie est relativement faible, 12 seulement sur les 463 connus en 1902 ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Nous ne nous occupons pas de la variation de l'excentricité, facile à étudier au moyen de la formule

$$e^2 = h^2 e'^2 + \eta^2 + 2 h e' \eta \cos(ft + \beta).$$

⁽²⁾ CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels* (Leipzig, 1902), t. I, p. 422. Les 12

Un de ces astéroïdes a une excentricité supérieure à celle de Jupiter; les onze autres sont des excentricités inférieures. Mais la faiblesse des excentricités n'est pas une condition suffisante pour qu'il y ait libration du périhélie. D'abord il faudrait considérer l'excentricité propre, au lieu de l'excentricité du mouvement troublé ⁽¹⁾; ensuite c'est à he' , et non à e' , qu'il faudrait la comparer, et la valeur du grand axe influe sur la constante h ⁽²⁾; enfin les commensurabilités approchées entre les moyens mouvements des astéroïdes et celui de Jupiter peuvent, lorsque $\frac{n}{n'}$ est voisin d'un rapport simple, faire subir des modifications considérables au déplacement de la ligne des apsides (*voir* chap. suivant).

CHAPITRE X.

CAS OÙ LE POTENTIEL EST UNE FONCTION PÉRIODIQUE DU TEMPS. MODIFICATIONS APPORTÉES AUX DÉPLACEMENTS DES NŒUDS ET DES APSIDES. ORBITES ABSOLUES ET ORBITES RÉELLES.

83. Étude des orbites faiblement excentriques et faiblement inclinées, quand la fonction perturbatrice est sinusoïdale par rapport au temps. — Dans ce dernier chapitre nous examinerons comment se présentent le déplacement des nœuds, le déplacement des apsides et la théorie des orbites absolues lorsqu'on est obligé de tenir compte des termes de la fonction perturbatrice produisant des inégalités d'ordre supérieur au premier (n° 13, 3°). Le temps figure alors, explicitement, dans l'expression de U , et les équations

astéroïdes en question possèdent les numéros suivants :

40, 117, 147, 189, 196, 205, 215, 286, 292, 300, 338, 357.

Seul le dernier a une excentricité supérieure à celle de Jupiter.

⁽¹⁾ L'excentricité propre est cependant inférieure, en général, à l'excentricité réelle.

⁽²⁾ Pour les astéroïdes dont les moyens mouvements sont supérieurs à 500", c'est-à-dire pour la presque-totalité des astéroïdes, la constante h est inférieure à $\frac{4}{5}$.

différentielles du mouvement n'admettent plus l'intégrale première des forces vives.

Le potentiel (39), relatif à la théorie de la Lune, appartient à cette catégorie des fonctions U; on a, d'ailleurs, une bonne approximation en le limitant aux deux premiers termes

$$U = \frac{f(m_0 + m)}{r} + \frac{n'^2}{4} r^2 \{ 1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)] \}.$$

Si nous considérons un système stellaire triple tel que la composante la plus éloignée soit de faible masse, les deux autres de masses m' , m'' , étant animées de mouvements circulaires, l'attraction des deux étoiles principales sur la troisième dérive du potentiel suivant

$$U = \frac{f(m' + m'')}{r} + \frac{f(m' a'^2 + m'' a''^2)}{4r^3} \{ 1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)] \} + \dots,$$

où a' et a'' désignent les rayons des circonférences décrites par les deux étoiles principales autour de leur centre de gravité pris comme origine, et n' la vitesse angulaire de leur mouvement; si r est assez grand, les termes non écrits peuvent être négligés. On remarquera l'analogie entre cette fonction U et celle (36) qui exprime le potentiel d'un corps céleste tournant autour du petit axe principal d'inertie relatif à son centre de gravité

$$U = \frac{fM}{r} + f \frac{2C - A - B}{4r^3} \left\{ 1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \frac{B - A}{2C - A - B} \cos^2 \varphi \cos[2\theta - 2n'(t - t_0)] \right\} + \dots$$

(les deux autres axes de l'ellipsoïde central d'inertie sont supposés inégaux).

Les trois potentiels que nous venons de citer, réduits à leurs deux premiers termes dans le développement suivant les puissances de r ou de $\frac{1}{r}$, peuvent être ramenés à la forme

$$(163) \quad U = \frac{I}{r} + \lambda^2 r^2 [1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 D \cos^2 \varphi \cos 2(\theta - n't + n't_0)],$$

après un choix convenable d'unités. *C'est une forme sinusoïdale par rapport au temps.*

Au sujet des trajectoires en général dans le champ de forces défini par (163) nous mentionnerons que les équations du mouvement, écrites, par exemple, en coordonnées polaires, au moyen des formules (15), admettent *l'intégrale première de Jacobi*

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2n'r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} + 2(U + k)$$

(k constante arbitraire). Il est donc possible, tout comme dans le problème restreint des trois corps, de choisir les conditions initiales du mouvement dans un tel domaine que le corps mobile reste à distance finie de l'origine quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Formons les équations du mouvement en coordonnées de Laplace (n° 7). Étant donné qu'il sera indispensable de faire des approximations, *posons que l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite sont des quantités du premier ordre de petitesse, que λ^2 , coefficient de la fonction perturbatrice, est du second ordre, et convenons de négliger, dans les calculs, les termes du quatrième ordre.*

Nous avons d'abord

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -6\lambda^2 r^h \sin \varphi \cos \varphi [1 + D \cos 2(\theta - n't + n't_0)],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -6D\lambda^2 r^h \cos^2 \varphi \sin 2(\theta - n't + n't_0),$$

et, en remplaçant r par $\frac{r}{s}$ dans U ,

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 1 - h\lambda^2 r^{h+1} [1 - 3\sin^2 \varphi + 3D \cos^2 \varphi \cos 2(\theta - n't + n't_0)].$$

Posons maintenant

$$r = \frac{C^2}{(1 + \xi) \cos \varphi} = \frac{C^2}{\cos \varphi} (1 - \xi + \dots)$$

et

$$C^2 = ap;$$

ξ est une quantité variable qui est de l'ordre de l'excentricité de la projection de l'orbite sur le plan xOy , autrement dit, c'est une quantité du premier ordre; a désigne le demi-grand axe osculateur

et p diffère de l'unité d'une quantité du second ordre. Avec les notations ainsi introduites, nous avons

$$\frac{1}{r \cos \varphi} = \frac{1}{\rho} = u = \frac{1+\xi}{C^2} = \frac{1+\xi}{ap}$$

Les dérivées de U s'expriment sous la forme suivante, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 1 - h\lambda^2 a^{h+1} (1 - \xi - h\xi) [1 + 3D \cos 2(\theta - n't + n't_0)],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -6\lambda^2 a^h (1 - h\xi) [1 + D \cos 2(\theta - n't + n't_0)] \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -6D\lambda^2 a^h (1 - h\xi) \sin 2(\theta - n't + n't_0).$$

Étant donné qu'il n'y a pas de dérivations ultérieures pour arriver aux équations du mouvement, dans lesquelles la variable indépendante est θ , nous pouvons exprimer t par rapport à θ de manière à nous maintenir dans l'approximation convenue. Or, la différence $\theta - nt$ (n , moyen mouvement osculateur) est constante, à des quantités près du second ordre. Comme les termes contenant le temps ont des coefficients du second ordre, nous négligerons ces quantités et nous aurons, par suite,

$$\lambda^2 \sin 2(\theta - n't + n't_0) = \lambda^2 \sin(\ell\theta + k),$$

$$\lambda^2 \cos 2(\theta - n't + n't_0) = \lambda^2 \cos(\ell\theta + k),$$

en posant

$$(164) \quad \ell = 2 \left(1 - \frac{n'}{n} \right),$$

et en désignant par k une constante de signification évidente.

Pour écrire les équations du mouvement, nous avons encore besoin de calculer J en fonction de θ

$$\begin{aligned} J^2 &= C^2 + 2 \int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \\ &= C^2 \left[1 - 12D\lambda^2 C^{2(h+1)} \int (1 - 2\xi - h\xi) \sin(\ell\theta + k) d\theta \right] \\ &= C^2 \left[1 + \frac{12}{\ell} D\lambda^2 C^{2(h+1)} \cos(\ell\theta + k) \right. \\ &\quad \left. + 12(h+2)D\lambda^2 C^{2(h+1)} \int \xi \sin(\ell\theta + k) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Dans chaque terme dont le coefficient contient λ^2 nous pouvons négliger les quantités qui, abstraction faite de ce facteur, sont du second ordre; c'est pourquoi nous écrirons, en utilisant un artifice de Gylden

$$\int \xi \sin(\ell\theta + k) d\theta = - \int \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} \sin(\ell\theta + k) d\theta,$$

d'où, en intégrant le second membre par parties

$$\begin{aligned} & \int \xi \sin(\ell\theta + k) d\theta \\ &= - \frac{d\xi}{d\theta} \sin(\ell\theta + k) + \ell \xi \cos(\ell\theta + k) + \ell^2 \int \xi \sin(\ell\theta + k) d\theta, \end{aligned}$$

et cette égalité est équivalente à

$$\int \xi \sin(\ell\theta + k) d\theta = - \frac{\ell \xi}{\ell^2 - 1} \cos(\ell\theta + k) + \frac{1}{\ell^2 - 1} \frac{d\xi}{d\theta} \sin(\ell\theta + k).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} J^2 = C^2 \bigg[& 1 + 12 D \lambda^2 C^{2(h+1)} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{h+2}{\ell^2-1} \ell \xi \right) \cos(\ell\theta + k) \\ & + 12 D \lambda^2 C^{2(h+1)} \frac{h+2}{\ell^2-1} \frac{d\xi}{d\theta} \sin(\ell\theta + k) \bigg]. \end{aligned}$$

Le deuxième coefficient des équations différentielles (18) et (19) est

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{d\theta} = -6 D \lambda^2 C^{2(h+1)} \sin(\ell\theta + k) + \text{termes du troisième ordre.}$$

La fonction W du n° 20 étant égale à

$$-6 \lambda^2 C^2 \alpha^h (1 - 2\xi - h\xi) [1 + D \cos(\ell\theta + k)],$$

l'équation (47), qui est la transformée de (19), s'écrit

$$\begin{aligned} (165) \quad & \frac{d^2 w}{d\theta^2} - 6 D \lambda^2 \alpha^{h+1} \sin(\ell\theta + k) \frac{dw}{d\theta} \\ & + [1 + 6 \lambda^2 \alpha^{h+1} + 6 D \lambda^2 \alpha^{h+1} \cos(\ell\theta + k)] w = 0, \end{aligned}$$

après avoir remplacé C^2 par α dans les coefficients de $\frac{dw}{d\theta}$ et de w .

L'équation (18), avec ξ comme nouvelle variable $\left(u = \frac{1+\xi}{C^2}\right)$,

prend une forme analogue, mais possède un second membre

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} - 6D\lambda^2 a^{h+1} \sin(\ell\theta + k) \frac{d\xi}{d\theta} + \xi \\ = -1 + \frac{C^2}{J^2} \cos^3 \varphi - h\lambda^2 a^{h+1} (1 - \xi - h\xi) [1 + 3D \cos(\ell\theta + k)]. \end{aligned}$$

Avant d'isoler dans le second membre les termes tout connus, il convient d'exprimer $-1 + \frac{C^2}{J^2} \cos^3 \varphi$, à des quantités près du quatrième ordre. Nous avons

$$-1 + \frac{C^2}{J^2} \cos^3 \varphi = -1 + \cos^3 \varphi \left(1 - 2 \int \rho^2 \frac{\partial U}{C^2} d\theta \right),$$

ou encore

$$-1 + \frac{C^2}{J^2} \cos^3 \varphi = -\frac{3}{2} \omega^2 - \frac{2}{C^2} \int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta.$$

ω doit être remplacé par sa valeur tirée de (165); quant à l'intégrale $\int \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$, elle a déjà été calculée à propos de J. Il vient donc, en substituant a à C^2 dans les termes dont le coefficient est du second ordre,

$$\begin{aligned} (166) \quad \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} - 6D\lambda^2 a^{h+1} \left(1 - 2 \frac{h+2}{\ell^2 - 1} \right) \sin(\ell\theta + k) \frac{d\xi}{d\theta} \\ + \left[1 - h(h+1)\lambda^2 a^{h+1} \right. \\ \left. - 3D\lambda^2 a^{h+1} \left(h^2 + h + 4\ell \frac{h+2}{\ell^2 - 1} \right) \cos(\ell\theta + k) \right] \xi = N. \end{aligned}$$

Le second membre N a pour expression

$$(167) \quad N = -\frac{3}{2} \omega^2 - h\lambda^2 a^{h+1} - 3D\lambda^2 a^{h+1} \left(h + \frac{4}{\ell} \right) \cos(\ell\theta + k).$$

Les équations (165) et (166) permettent de déterminer les déplacements respectifs des nœuds et des apsides; le moyen mouvement de la ligne des nœuds résulte de l'intervalle moyen de temps entre deux zéros consécutifs de ω , tandis que le moyen mouvement de la ligne des apsides est lié à l'intervalle moyen de temps entre les points stationnaires de ξ ⁽¹⁾.

(1) Dans les précédents chapitres, on a étudié le déplacement des apsides au moyen de l'équation différentielle (69) dans laquelle on a supprimé le second

84. Conséquences relatives aux déplacements des nœuds et des apsides. Application à la Lune. — Il convient de réduire (165) et (166) à la forme canonique (voir la fin du n° 24), en posant

$$w = \zeta e^{-\frac{3D}{l} \lambda^2 a^{h+1} \cos(l\theta + k)} = \zeta \left[1 - \frac{3D}{l} \lambda^2 a^{h+1} \cos(l\theta + k) + \dots \right],$$

$$\zeta = y e^{-\frac{3D}{l} \lambda^2 a^{h+1} \left(1 - 2 \frac{h+2}{l^2-1} \right) \cos(l\theta + k)}$$

$$= y \left[1 - \frac{3D}{l} \lambda^2 a^{h+1} \left(1 - 2 \frac{h+2}{l^2-1} \right) \cos(l\theta + k) + \dots \right].$$

Les nouvelles inconnues sont ζ et y . Après avoir transformé (165) et (166), multiplions les deux membres de (165) par

$$1 + \frac{3D}{l} \lambda^2 a^{h+1} \cos(l\theta + k),$$

et les deux membres de (166) par

$$1 + \frac{3D}{l} \lambda^2 a^{h+1} \left(1 - 2 \frac{h+2}{l^2-1} \right) \cos(l\theta + k);$$

nous obtenons, en nous arrêtant aux termes du troisième ordre inclus,

$$(168) \quad \frac{d^2 \zeta}{d\theta^2} + \left[1 + 6 \lambda^2 a^{h+1} + 6D \lambda^2 a^{h+1} \left(1 + \frac{l}{2} \right) \cos(l\theta + k) \right] \zeta = 0,$$

et

$$(169) \quad \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \left[1 - h(h+1) \lambda^2 a^{h+1} - 6D \lambda^2 a^{h+1} \left(h \frac{h+1}{2} - \frac{l}{2} + 3l \frac{h+2}{l^2-1} \right) \cos(l\theta + k) \right] y = N.$$

Remarquons, en outre, que le second membre de l'équation (169) ne donne, dans les solutions que nous avons en vue, que des termes petits par rapport à y ; ils sont, en effet, du second ordre, comme l'on s'en rend compte d'après (167), et y est du premier ordre. *Négligeons donc N dont l'influence sur le moyen mouvement des apsides est nulle*: l'intervalle moyen des valeurs

membre et réduit le coefficient de ζ à $1 - \Psi$. Il ne serait pas légitime d'opérer ainsi dans le cas présent, car on négligerait des inégalités qui ne sont pas insensibles, bien qu'elles soient d'ordre supérieur à 2 en λ .

de θ qui séparent deux apsides consécutives est alors le même que celui des valeurs de θ qui séparent deux zéros consécutifs d'une intégrale de l'équation (169) sans second membre.

Il résulte de la réduction précédente que *dans tout champ d'attraction tel que le potentiel puisse être considéré comme une fonction sinusoïdale du temps, le déplacement de la ligne des nœuds, et le déplacement de la ligne des apsides sont déterminés chacun par une équation de Mathieu* ⁽¹⁾.

L'intégration de (168) et (169) se fait par diverses méthodes devenues classiques (Jacobi, Gylden, Bruns, Lindstedt, Hill). Si les termes en $\cos(l\theta + k)$ n'existaient pas dans les coefficients des inconnues, les intervalles moyens de θ entre deux nœuds ascendants consécutifs, et entre deux périastres consécutifs, seraient respectivement

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1+6\lambda^2\alpha^{h+1}}} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{1-h(h+1)\lambda^2\alpha^{h+1}}}.$$

Les termes en $\cos(l\theta + k)$ ont pour effet d'augmenter ces intervalles; donc le déplacement des nœuds, puisqu'il a lieu dans le sens rétrograde, sera plus lent; au contraire, le déplacement des apsides, étant de sens direct (avec $h = 2$ ou $h = -3$), sera plus rapide.

En faisant $h = 2$, et $\lambda = \frac{n'}{2}$, nous retrouverons des résultats connus de la théorie de la Lune. Mettons $\frac{1}{n^2}$ à la place de α^3 (troisième loi de Képler appliquée au système Terre-Lune), et posons

$$\frac{n'}{n} = q \quad \text{d'où} \quad l = 2(1 - q);$$

les équations (168) et (169), cette dernière sans le second membre, deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \left[1 + \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{2}q^2 \left(1 + \frac{l}{2} \right) \cos(l\theta + k) \right] \zeta &= 0; \\ \frac{d^2\gamma}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{3}{2}q^2 - \frac{3}{2}q^2 \left(3 - \frac{l}{2} + \frac{12l}{l^2-1} \right) \cos(l\theta + k) \right] \gamma &= 0. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ L'équation de Mathieu est dite aussi « équation de Gylden-Lindstedt », depuis que Gylden et Lindstedt l'on étudiée d'une manière approfondie.

Les intervalles moyens entre les zéros de ζ et entre les zéros de γ sont

$$\frac{\pi}{1 + \frac{3}{4}q^2 - \frac{9}{32}q^3 - \dots} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{1 - \frac{3}{4}q^2 - \frac{225}{32}q^3 - \dots},$$

dont les développements s'obtiennent aisément par la méthode de Bruns ⁽¹⁾; il est nécessaire de conserver un certain nombre de termes de la deuxième série car sa convergence est très lente. Les moyens mouvements du nœud et du périée de l'orbite lunaire, déduits de ce calcul, sont

$$\begin{aligned} n \left(-\frac{3}{4}q^2 + \frac{9}{32}q^3 + \dots \right) & \quad (\text{nœud}), \\ n \left(\frac{3}{4}q^2 + \frac{225}{32}q^3 + \dots \right) & \quad (\text{périée}). \end{aligned}$$

En donnant à q sa valeur numérique $q = 0,0748013$, on obtient

$$\begin{aligned} n \left(-\frac{3}{4}q^2 + \frac{9}{32}q^3 + \dots \right) &= -0,004081n, \\ n \left(\frac{3}{4}q^2 + \frac{225}{32}q^3 + \dots \right) &= 0,008447n, \end{aligned}$$

alors que les moyens mouvements réels du nœud et du périée sont $-0,004022n$ et $0,008452n$; l'approximation est très satisfaisante.

Si l'on n'avait pas tenu compte des termes en $\cos(l\theta + k)$ dans les équations différentielles, autrement dit, si l'on avait substitué à l'attraction du Soleil celle d'un anneau de Gauss circulaire, le calcul des moyens mouvements aurait donné

$$\begin{aligned} n \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{2}q^2} \right) &= -0,0041877n \quad (\text{pour le nœud}), \\ n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2}q^2} \right) &= 0,0042053n \quad (\text{pour le périée}). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Astron. Nachr.*, n° 2553, 1883. — Les termes en q^2 correspondent aux perturbations du premier ordre par rapport au coefficient de la fonction perturbatrice, et les termes en q^3 à des perturbations du second ordre. Les termes en q^3 proviennent de l'expression particulière de l ; si l'on remplaçait l par sa valeur numérique, il n'y aurait que des termes en $q^2, q^4, \dots, q^{2m}$, etc.

Le moyen mouvement, ainsi calculé, du périée est environ la moitié du moyen mouvement réel ⁽¹⁾.

D'une manière générale, l'influence du terme en $\cos(l\theta + k)$ dans l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + [1 + A q^2 + B q^2 \cos(l\theta + k)]x = 0,$$

croît rapidement avec le coefficient Bq^2 si l'on fait varier B et q . Dans le cas de la Lune, le coefficient Bq^2 est égal à 0,016 pour l'équation donnant le moyen mouvement du nœud et le résultat qu'on obtient avec $B = 0$ ne présente pas un écart trop fort avec la réalité (révolution du nœud en 17^{ans},9 au lieu de 18^{ans},6). Mais l'équation qui donne le moyen mouvement du périée a son coefficient Bq^2 presque égal, en valeur absolue, à 0,1 et le moyen mouvement obtenu avec $B = 0$ est très éloigné du moyen mouvement exact.

85. **Déplacement de la ligne des apsides lorsque le moyen mouvement de la planète troublée présente une commensurabilité approchée simple avec le moyen mouvement de la planète troublante.** — Lorsque le rapport des moyens mouvements de deux planètes est voisin d'une fraction simple (à termes entiers) telle que la différence entre le numérateur et le dénominateur n'excède pas quelques unités ⁽²⁾, le rayon vecteur de la planète la plus proche n'est pas assez petit vis-à-vis de celui de la planète la plus éloignée pour qu'on puisse réduire à un ou deux termes le développement de la fonction perturbatrice provenant de l'action de l'une des planètes sur l'autre. *Pour avoir, dans ce cas, une idée de la variation des éléments des orbites, le meilleur procédé consiste à rattacher chacune d'elles à une orbite périodique issue de conditions initiales peu différentes des conditions réelles à une époque donnée.* C'est justement dans les voisinages

⁽¹⁾ On vérifie, sur cet exemple, que le principe de Gauss ne donne avec exactitude que les termes en ε (ici $\varepsilon = q^2$) dans les développements en séries relatifs aux déplacements séculaires des nœuds et des apsides.

⁽²⁾ Cette différence est appelée *ordre de la commensurabilité*. Par exemple le rapport $\frac{5}{3}$ fixe une commensurabilité du troisième ordre.

des commensurabilités simples que se sont surtout placés tous les auteurs qui ont fait des recherches sur les solutions périodiques des équations des mouvements des planètes. Les travaux étant nombreux ⁽¹⁾, nous nous contenterons d'énoncer certains résultats.

Pour ce qui concerne le mouvement des nœuds, la question est en suspens, car on n'a encore jamais représenté les solutions périodiques dans lesquelles l'inclinaison est différente de zéro, solutions dont Poincaré a démontré l'existence et qu'il a appelées « solutions périodiques de la troisième sorte ». Il semble toutefois que les commensurabilités approchées n'aient pas une grande influence sur le déplacement des nœuds, si l'on en juge d'après les quatre premiers satellites de Jupiter, ou d'après certains couples de satellites de Saturne (Titan et Hypérion, Mimas et Téthys, Encelade et Dioné) ⁽²⁾.

Par contre, l'action sur le déplacement des apsides est très sensible, et se traduit par les particularités suivantes (nous supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agit du problème astéroïdal) :

1° *Il y a, dans certains cas, libration du périhélie.* [Pour la solution périodique, le périhélie est fixe et se trouve en conjonction avec le périhélie ou avec l'aphélie de Jupiter ⁽³⁾.] La tendance à la libration est particulièrement marquée pour les astéroïdes dont les moyens mouvements sont voisins de $700''$ (commensurabilité $\frac{7}{3}$) ⁽⁴⁾; les longitudes des périhélies correspondants sont voisines de la longitude du périhélie de Jupiter.

2° *La révolution du périhélie, au lieu de s'effectuer dans le sens direct, peut s'effectuer dans le sens rétrograde :* on obtient, en effet, des solutions périodiques en se fixant n'importe lequel des deux sens. Le cas du mouvement rétrograde trouve son application dans la théorie d'Hypérion, satellite de Saturne, dont le

(1) Voir HILL, POINCARÉ, CHARLIER, SCHWARZSCHILD, WILKENS, etc.

(2) On pourrait s'attendre, occasionnellement, à un moyen mouvement de la ligne des nœuds égal à zéro (voir n° 87).

(3) Une telle solution périodique appartient généralement à la première sorte de Poincaré si l'on néglige l'excentricité de Jupiter, et à la deuxième sorte si l'on en tient compte.

(4) J. MASCART, *Comptes rendus*, t. 199, 1934, p. 260-261. Le moyen mouvement diurne de Jupiter est $299'',1$.

moyen mouvement autour de Saturne est presque égal aux $\frac{3}{4}$ du moyen mouvement de Titan ⁽¹⁾.

3° *La rotation de la ligne des apsides, dans le sens direct aussi bien que dans le sens rétrograde, peut être très rapide.* En particulier les solutions périodiques à courtes périodes de M. Heinrich dans certains cas de commensurabilité du premier ordre que présentent les astéroïdes possèdent la propriété que si l'excentricité de l'astéroïde tend vers zéro la vitesse de rotation de son périhélie devient infiniment grande ⁽²⁾.

On a, en somme, au sujet du déplacement de la ligne des apsides, des résultats très divers et, en général, très différents de ceux obtenus dans les champs de gravitation fixes.

86. Solutions quasi-périodiques approchées et réelles, obtenues à partir d'une solution périodique dans un champ de gravitation fixe. — Les équations différentielles du mouvement d'un corps céleste dans un champ de forces du type

$$U(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta, \sin n't, \cos n't) \quad (\text{voir n}^\circ 13),$$

peuvent s'obtenir par la méthode de variation des constantes de M. Heinrich, en prenant comme point de départ une solution périodique des équations du mouvement dans le champ de forces plus simple $U(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta)$. Cette fonction U diffère de la précédente par l'absence des termes de valeur moyenne nulle relativement au temps dans le développement classique en série de Fourier, et les mouvements que nous avons en vue doivent être considérés comme résultant de la *perturbation* des mouvements périodiques du champ de forces $U(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta)$; ils sont

⁽¹⁾ Soit une commensurabilité approchée de la forme $\frac{n'}{n} = \frac{p}{q} + \alpha$ (n' , moyen mouvement de la planète troublante; n , moyen mouvement de la planète troublée); le déplacement du périhélie est direct ou rétrograde suivant que l'on a $(n' - n)(pn - qn') > 0$, ou $(n' - n)(pn - qn') < 0$.

⁽²⁾ Voir *Bull. Astr.* 2^e série, Mém., t. II, 1922, p. 440. Ce fait dénote une instabilité des mouvements peu excentriques, qui pourrait contribuer à expliquer l'existence des lacunes dans l'« anneau » des petites planètes.

issus, par conséquent, de conditions initiales voisines de celles des mouvements périodiques non troublés.

Posons

$$(170) \quad U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \\ + \varepsilon \Omega'(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta, \sin n' t, \cos n' t),$$

et considérons un mouvement périodique « non troublé », c'est-à-dire un mouvement périodique du champ de forces

$$\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta),$$

en prenant, pour le représenter, les formules suivantes :

$$(171) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \alpha_0 + \Sigma a_{m_1, m_2, m_3} e^{(m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3) \sqrt{-1}} \\ z = \Sigma b_{m_1, m_2, m_3} e^{(m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3) \sqrt{-1}} \\ \theta = h Q_3 + \Sigma g_{m_1, m_2, m_3} e^{(m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3) \sqrt{-1}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Q_1 = \text{const.} = k_1, \\ Q_2 = \text{const.} = k_2, \\ Q_3 = n_3 t + h_3. \end{array}$$

La variation des constantes de cette solution périodique lorsqu'on passe dans le champ de forces complet (170) est définie par les équations différentielles du n° 10

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial R_k}, \quad \frac{dR_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial Q_k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

dans lesquelles on a, la force vive $2T$ ayant été exprimée au moyen des développements (171) des coordonnées ρ, z, θ

$$R_k = \left[\frac{\partial T}{\partial Q'_k} \right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial Q'_k} dQ_1 dQ_2 dQ_3 \quad (k = 1, 2, 3)$$

(Q'_1, Q'_2, Q'_3 devant être remplacés, après l'intégration, par $0, 0, n_3$), et

$$H = \frac{n_3 R_3}{2} - \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \right] - \varepsilon \Omega'$$

(dans le crochet figure la partie constante de $\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega$ lorsqu'il s'agit de la solution périodique de départ, mais cette partie constante doit être exprimée en fonction de R_1, R_2, R_3 et elle devient une quantité variable pour les solutions nouvelles dans le champ de forces complet; quant à la fonction $\varepsilon \Omega'$, elle doit être déve

loppée en substituant aux coordonnées leurs expressions (171) transformées par l'introduction de R_1, R_2, R_3 qui jouent le rôle de constantes d'intégration dans le mouvement non troublé ⁽¹⁾ : Ω' = fonction de $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, t$). Les équations différentielles de M. Heinrich s'écrivent donc

$$(172) \quad \begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{n_3 R_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \right] - \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial R_1}, \\ \frac{dQ_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{n_3 R_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \right] - \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial R_2}, \\ \frac{dQ_3}{dt} = \frac{\partial}{\partial R_3} \left(\frac{n_3 R_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial R_3} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \right] - \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial R_3}, \\ \frac{dR_1}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial Q_1}, \\ \frac{dR_2}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial Q_2}, \\ \frac{dR_3}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial Q_3}. \end{cases}$$

Mais il est facile de voir, en faisant tendre $\varepsilon \Omega'$ vers zéro, que les dérivées partielles de la fonction $H + \varepsilon \Omega'$ ont pour parties principales, respectivement : 0, 0, $n_3^{(0)}(n_3^{(0)}$, valeur de n_3 pour $\varepsilon \Omega' \equiv 0$), de sorte qu'on peut écrire, par analogie avec (144)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{n_3 R_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \right] &= \varepsilon U_1(R_1, R_2, R_3), \\ \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{n_3 R_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \right] &= \varepsilon U_2(R_1, R_2, R_3), \\ \frac{\partial}{\partial R_3} \left(\frac{n_3 R_3}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial R_3} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta) \right] &= n_3^{(0)} + \varepsilon U_3(R_1, R_2, R_3) \end{aligned}$$

($n_3^{(0)}$ est une constante absolue, contrairement à n_3 qui varie avec R_1, R_2, R_3). Les fonctions $\varepsilon U_1, \varepsilon U_2, \varepsilon U_3$ disparaissent avec la partie $-\varepsilon \Omega'$ de la fonction H , mais il est préférable de ne pas envisager cette disparition en faisant $\varepsilon = 0$, car ε doit conserver sa valeur dans les termes de H indépendants du temps (termes

⁽¹⁾ Les six constantes d'intégration sont alors $R_1, R_2, R_3, k_1, k_2, k_3$; quant à la constante n_3 , elle dépend de R_1, R_2, R_3 et doit être exprimée effectivement en fonction de R_1, R_2, R_3 .

figurés entre crochets). Pour éviter toute équivoque, nous n'avons qu'à affecter les fonctions $\varepsilon\Omega'$, εU_1 , εU_2 , εU_3 du coefficient μ , en convenant de faire $\mu = 0$ pour le mouvement non troublé, et $\mu = 1$ dans les développements en séries relatifs au mouvement troublé. Les équations (172) prendront ainsi la forme suivante :

$$(173) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} &= \mu \varepsilon \left(U_1 - \frac{\partial \Omega'}{\partial R_1} \right), & \frac{dR_1}{dt} &= \mu \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial Q_1}, \\ \frac{dQ_2}{dt} &= \mu \varepsilon \left(U_2 - \frac{\partial \Omega'}{\partial R_2} \right), & \frac{dR_2}{dt} &= \mu \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial Q_2}, \\ \frac{dQ_3}{dt} &= n_3^{(0)} + \mu \varepsilon \left(U_3 - \frac{\partial \Omega'}{\partial R_3} \right), & \frac{dR_3}{dt} &= \mu \varepsilon \frac{\partial \Omega'}{\partial Q_3}, \end{aligned} \right.$$

qui est très commode pour obtenir les inconnues par approximations successives. Les quantités affectées des coefficients $\mu \varepsilon$ sont fonctions de Q_1 , Q_2 , Q_3 , R_1 , R_2 , R_3 , t .

Si nous introduisons une variable supplémentaire τ qui soit constamment égale à $n't$, le système (173) sera remplacé par le système ci-après, comportant sept équations

$$(174) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= \mu \varepsilon \Psi_1(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, \tau), \\ \frac{dR_2}{dt} &= \mu \varepsilon \Psi_2(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, \tau), \\ \frac{dR_3}{dt} &= \mu \varepsilon \Psi_3(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, \tau), \\ \frac{dQ_1}{dt} &= \mu \varepsilon \Phi_1(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, \tau), \\ \frac{dQ_2}{dt} &= \mu \varepsilon \Phi_2(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, \tau), \\ \frac{dQ_3}{dt} &= n_3^{(0)} + \mu \varepsilon \Phi_3(Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} &= n'. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 , Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 sont holomorphes au voisinage de l'orbite périodique non troublée, et admettent, ainsi que leurs dérivées successives, la période 2π par rapport aux variables Q_3 , τ .

En vertu des théorèmes généraux sur les mouvements des systèmes dynamiques, il existe, dans l'espace à sept dimensions, parmi

les trajectoires du point de coordonnées $(R_1, R_2, R_3, Q_1, Q_2, Q_3, \tau)$, une infinité de familles d'orbites absolues représentables sur des tores et se réduisant, pour $\mu = 0$, à l'orbite quasi-périodique

$$R_1 = \text{const.}, \quad R_2 = \text{const.}, \quad R_3 = \text{const.};$$

$$Q_1 = k_1^{(0)}, \quad Q_2 = k_2^{(0)}, \quad Q_3 = n_3^{(0)}t + k_3^{(0)}, \quad \tau = n't.$$

Dans la représentation de ces orbites absolues il y a deux variables angulaires qui croissent, en moyenne, proportionnellement au temps et cinq variables qui oscillent de part et d'autre d'une valeur moyenne. Étant donné que dans le mouvement non troublé les variables angulaires croissantes sont Q_3 et τ , il en est encore ainsi dans les mouvements troublés (récurrents) sur les orbites absolues en question. Tous ces mouvements-là sont quasi-périodiques non seulement par rapport à Q_3 et à τ , mais aussi par rapport au temps puisque $\tau = n't$. Les fréquences fondamentales (par rapport au temps) sont : la fréquence propre perturbée ⁽¹⁾ qui est voisine de $n_3^{(0)}$ et la fréquence extérieure n' . Nous ne sommes pas en mesure de déterminer la première de ces fréquences, pas plus que nous ne savons mettre en évidence les systèmes de conditions initiales qui donnent naissance à une orbite absolue, mais tout nombre voisin de $n_3^{(0)}$, quand l'orbite périodique de départ est convenablement choisie (cf. n° 76, 3^e note), représente avec une erreur aussi petite que l'on veut la fréquence propre perturbée sur une orbite bipériodique située dans le voisinage. De même, des conditions initiales quelconques, mais voisines de celles du mouvement non troublé, peuvent toujours être regardées comme les conditions initiales d'un mouvement bipériodique, avec une erreur arbitrairement faible. Cela est important pour la représentation approchée des mouvements bipériodiques, et aussi des mouvements réels qui sont assimilables, temporairement, à des mouvements bipériodiques.

Quand la fréquence propre perturbée est commensurable avec la fréquence extérieure, la famille correspondante de mouvements

(¹) Terminologie de M. Kryloff.

bipériodiques dégénère en un nombre fini de mouvements périodiques.

Les résultats déduits du système (174) sont à rapprocher de ceux obtenus à propos du système (146). Dans un cas comme dans l'autre, les orbites absolues à deux fréquences fondamentales ne sont pas les seules orbites absolues ⁽¹⁾, mais nous ignorons le moyen de représenter les mouvements récurrents dont les trajectoires sont associées, par familles, à des volumes ou hypervolumes invariants ⁽²⁾. *Il semble donc que la presque-totalité des orbites absolues nous soit inaccessible.*

87. Solutions quasi-périodiques approchées et réelles, obtenues à partir d'une ellipse képlérienne, ou à partir d'une solution périodique du problème restreint des trois corps. — Les mouvements dans les champs de forces actuellement envisagés résultent aussi de la perturbation de mouvements périodiques dans d'autres champs de forces que ceux du Chapitre IX. En partant, par exemple, d'un mouvement képlérien elliptique, on effectue la variation des constantes au moyen des équations différentielles suivantes :

$$(175) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{L^3} - \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial L}, & \frac{d\lambda}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial G}, & \frac{d\omega}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial C}, \\ \frac{dL}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial N}, & \frac{dG}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}, & \frac{dC}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \omega}, \end{cases}$$

dans lesquelles

$$L = na^2, \quad G = na^2 \sqrt{1-e^2}, \quad C = na^2 \sqrt{1-e^2} \cos i;$$

N , anomalie moyenne; λ , distance du périhélie au nœud ascendant; ω , longitude du nœud ascendant; $\varepsilon \Omega$, fonction perturbatrice,

⁽¹⁾ Il est certain, au surplus, que toutes les orbites absolues à deux fréquences fondamentales ne sont pas comprises dans la catégorie dont nous avons parlé. Il y en a, et ce sont probablement les plus nombreuses, pour lesquelles Q_1 et Q_2 , au lieu d'osciller de part et d'autre de deux valeurs moyennes, possèdent des vitesses angulaires moyennes différentes de zéro et liées à la vitesse angulaire moyenne de Q_3 et à n' par deux relations linéaires homogènes à coefficients entiers.

⁽²⁾ Dans les problèmes comportant plus de deux degrés de liberté, il se pourrait que les mouvements récurrents les plus généraux ne soient pas quasi-périodiques. La question n'est pas tranchée.

exprimée par rapport à N , λ , ω , L , G , C , t . De ces équations découle la représentation approchée d'orbites absolues ayant comme fréquences fondamentales la fréquence propre perturbée voisine de n_0 (valeur de n du mouvement elliptique) et la fréquence extérieure n' . Les nœuds et les périhélie de ces orbites ont des positions moyennes fixes ⁽¹⁾, mais il existe d'autres orbites absolues à deux fréquences fondamentales, orbites probablement plus nombreuses que les premières et telles que les variables angulaires λ et ω « tournent » en étant animées, par exemple, de vitesses moyennes commensurables avec la vitesse moyenne de N . Il est clair que les orbites bipériodiques de cette catégorie proviennent de la dégénérescence d'orbites quadripériodiques ayant comme fréquences : un nombre voisin de n_0 , deux nombres voisins de zéro et la fréquence extérieure n' .

Un autre procédé pour obtenir, d'une manière approchée, des orbites absolues bipériodiques, est celui au moyen duquel M. Heinrich a obtenu des solutions périodiques de la deuxième sorte du problème astéroïdal en partant de solutions périodiques de la première sorte du problème restreint. Plaçons-nous dans les conditions de M. Heinrich ; le problème est plan et les axes de coordonnées Ox , Oy , tournent avec la vitesse angulaire n' (moyen mouvement de Jupiter). Désignons par a' et e' le demi-grand axe et l'excentricité de Jupiter, par a et e le demi-grand axe osculateur et l'excentricité osculatrice de l'astéroïde. En prenant comme coordonnées angulaires

$$\lambda = (n - n')t + l + g, \quad \gamma = n't - g,$$

nous avons les coordonnées scalaires conjuguées ⁽²⁾

$$L = na^2, \quad G = na^2(1 - \sqrt{1 - e^2}),$$

avec les relations

$$n^2 a^3 = f M, \quad n'^2 a'^3 = f M(1 + \varepsilon)$$

(M , masse du Soleil ; ε , rapport de la masse de Jupiter à celle du

⁽¹⁾ Il s'agit donc d'orbites situées dans des régions de commensurabilités simples.

⁽²⁾ TISSERAND, *Méc. Cél.*, t. IV, p. 426-427.

Soleil). Les équations du mouvement, qui effectuent la variation des quatre constantes a, e, l, g , s'écrivent

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \gamma}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G},$$

en posant

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{fM}{L} \right)^2 + n'(L - G) + \varepsilon F_0(L, G, \lambda, \gamma) + \varepsilon e' F'(L, G, \lambda, \gamma, n't)$$

(εF_0 est la fonction perturbatrice du problème restreint, tandis que $\varepsilon e' F'$ est la partie de la fonction perturbatrice qui est due à l'excentricité de Jupiter). Mais si l'on considère une solution périodique correspondant à $e' = 0$, on peut faire en sorte que les nouvelles variables angulaires soient de la forme suivante

$$Q' = (\beta' N - \beta n')t + k', \quad Q'' = k''$$

(N voisin d'un sous-multiple de n ; β et β' entiers), et se réduisent, pour la solution périodique, à une fonction linéaire du temps et une constante, cependant que les coordonnées scalaires R' et R'' (moments séculaires) conjuguées à Q' et Q'' se réduisent, de leur côté, pour la même solution, à deux constantes ⁽¹⁾. La nouvelle fonction jouant le rôle de F est une fonction H telle que l'on ait, pour $e' = 0$,

$$\frac{\partial H}{\partial R'} = \beta' n_0 - \beta n', \quad \frac{\partial H}{\partial R''} = \frac{\partial H}{\partial Q'} = \frac{\partial H}{\partial Q''} = 0$$

[n_0 , nombre voisin d'un sous-multiple de n , doit être traité comme une constante absolue, c'est-à-dire invariable quand on passe de la solution périodique du problème restreint aux diverses solutions du problème astéroïdal; $\beta' n_0 - \beta n'$ est un sous-multiple de n_0 et de n' ($n^\circ 10$)]. Elle peut donc se mettre sous la forme

$$H = (\beta' n_0 - \beta n') R' + \varepsilon e' \Gamma(R', R'', Q', Q'', n't),$$

et nous avons pour le problème astéroïdal les équations suivantes, utilisables au voisinage de chaque solution périodique du problème

⁽¹⁾ R' et R'' fixent la forme et la grandeur de l'orbite périodique, tandis que les termes constants de Q' et Q'' sont des paramètres de position.

restreint

$$(176) \quad \begin{cases} \frac{dQ'}{dt} = \beta' n_0 - \beta n' + \varepsilon e' \frac{\partial \Gamma}{\partial R'}, & \frac{dR'}{dt} = -\varepsilon e' \frac{\partial \Gamma}{\partial Q'}, \\ \frac{dQ''}{dt} = \varepsilon e' \frac{\partial \Gamma}{\partial R''}, & \frac{dR''}{dt} = -\varepsilon e' \frac{\partial \Gamma}{\partial Q''}. \end{cases}$$

On entrevoit, ici encore, l'existence d'orbites bipériodiques dont les fréquences, si l'on se réfère à des axes fixes, sont n' et un nombre voisin de n_0 .

88. Autres solutions formellement ou réellement quasi-périodiques. — L'application au système (176) des méthodes du Chapitre V (nos 41-44) ⁽¹⁾ se fait sans difficulté, mais la solution périodique du problème restreint, au voisinage de laquelle sont situées les orbites données par ces méthodes, n'est peut-être pas quelconque; ses éléments Q'', R', R'' doivent être voisins de nombres qui puissent satisfaire aux trois équations algébriques remplaçant (93) dans le problème actuel.

Des orbites plus générales sont obtenues en appliquant à une solution *bipériodique* du problème restreint la méthode de variation des constantes de M. Heinrich, puis la méthode d'approximation de M. Kryloff (Chap. V) étendue à trois variables angulaires. Il y a, dans ce cas, parmi les orbites réelles représentées, une infinité d'orbites absolues ayant trois fréquences fondamentales, savoir, deux fréquences propres perturbées, se réduisant à celles du problème restreint quand $e' = 0$, et la fréquence extérieure n' . Les valeurs approchées du grand axe osculateur et de l'excentricité osculatrice doivent être choisies dans un domaine rendant possible la résolution des équations qui remplacent (93).

Dans le cas de trois degrés de liberté [systèmes (174), (175)], on obtient des solutions formelles à deux, trois ou quatre fréquences fondamentales (y compris la fréquence extérieure) suivant qu'on étudie la perturbation d'un mouvement périodique, bipériodique ou tripériodique pris dans un champ de gravitation fixe (on peut d'ailleurs prendre égales à zéro une ou deux fréquences fondamentales du mouvement non troublé, ce qui donne, par

⁽¹⁾ Voir au n° 76 ce qui a été dit concernant l'application de ces méthodes.

exemple, des mouvements formellement *quadripériodiques* résultant de la perturbation d'un mouvement képlérien elliptique). Parmi ces solutions formelles, il en est évidemment qui possèdent la bi, tri, ou quadripériodicité exacte, mais cela n'indique pas le caractère des mouvements récurrents les plus généraux; on ne saurait affirmer, en particulier, qu'ils correspondent aux orbites absolues quadripériodiques.

89. Considérations sur les lacunes dans la région des astéroïdes.

— Signalons, pour terminer, l'application qu'on pourrait faire de la méthode de résonance de M. Kryloff ⁽¹⁾ à l'étude de la perturbation du mouvement elliptique, étude basée sur les équations (175). Il faut supposer que l'excentricité osculatrice n'est pas trop faible, sans quoi la ligne des apsides serait susceptible de se mouvoir avec une vitesse considérable, et la méthode susmentionnée serait en défaut. Mais en nous plaçant dans les conditions des n^{os} 70 et 73, avec une excentricité au moins aussi importante que $\sqrt{\varepsilon}$, la généralisation des résultats obtenus par M. Kryloff pour les systèmes à un degré de liberté nous conduirait au théorème suivant :

Lorsque le moyen mouvement d'un astéroïde est presque dans un rapport simple $\frac{P}{q}$ avec celui de Jupiter, il existe, en première approximation, un nombre positif δ de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$ (racine carrée de la masse de Jupiter rapportée à celle du Soleil) tel que si $\left| \frac{n}{n'} - \frac{P}{q} \right|$ est inférieur à δ , le grand axe de l'orbite subit des oscillations de longue durée dont l'amplitude est de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, la valeur moyenne du moyen mouvement troublé étant égale à $\frac{P}{q} n'$. Si, au contraire, $\left| \frac{n}{n'} - \frac{P}{q} \right|$ est notablement supérieur à δ , l'amplitude des oscillations du grand axe est seulement de l'ordre de ε ⁽²⁾, et le moyen mouvement troublé reste voisin de n (voisinage en ε).

⁽¹⁾ N. KRYLOFF et N. BOGOLIUBOFF, *L'application des méthodes de la Mécanique non linéaire à la théorie des perturbations des systèmes canoniques* (Public. Acad. Sc. Ukraine, Kieff, 1934).

⁽²⁾ La durée de chaque oscillation est, dans les deux cas, de l'ordre de $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Ainsi se trouvent confirmées et précisées les conclusions de Newcomb, Tisserand, Gylden, etc., au sujet des astéroïdes dont les moyens mouvements sont presque commensurables, dans un rapport simple, avec celui de Jupiter : les perturbations sont plus importantes dans les zones critiques, mais ne compromettent nullement la stabilité.

Par ailleurs, les fortes oscillations du grand axe expliquent, dans une certaine mesure, l'existence des lacunes, car une quantité soumise à des oscillations de ce genre est plus longtemps voisine de ses valeurs extrêmes que de sa valeur moyenne, tout comme l'élongation du pendule simple.

CONCLUSION.

Les méthodes exposées dans ce Mémoire peuvent trouver leur utilisation dans un grand nombre de problèmes de la Mécanique Céleste. En ce qui concerne le système solaire, les seuls astres restant en dehors du champ d'application sont les comètes, à cause des forces perturbatrices qui peuvent devenir énormes. Si l'on passe au monde sidéral, les perturbations dans les systèmes stellaires triples, quadruples, etc., posent des problèmes souvent semblables à ceux du système solaire. La dynamique des amas globulaires se ramène également à des équations des types que nous avons considérés, mais il est évident que les questions relatives aux courants d'étoiles dans la galaxie, aux mouvements internes dans les nébuleuses spirales, etc., ne peuvent pas être abordées sans faire appel à l'Hydrodynamique ou à la Mécanique Statistique.

Parmi les points méritant une étude plus détaillée, il y a lieu de mentionner les questions non résolues sur les mouvements récurrents. On manque de critères permettant de déceler les conditions initiales de ces mouvements. On ignore, en outre, dans le cas de n degrés de liberté, n étant supérieur à 2, si tous les mouvements récurrents possèdent des propriétés de quasi-périodicité (dans l'affirmative, le nombre des fréquences pourrait être supérieur à n). Enfin si l'on fait la représentation approchée des mou-

vements récurrents, c'est-à-dire, aussi, celle des mouvements réels, au moyen de séries asymptotiques (à défaut de séries convergentes), on ne prend qu'un nombre limité de termes de chaque série et l'on ne connaît pas la limite de l'erreur commise. Mais c'est là la faiblesse de toutes les méthodes de la Mécanique Céleste, même quand elles conduisent à des séries convergentes.

Vu et approuvé :

Paris, le 3 décembre 1937.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 3 décembre 1937.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.

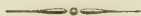


TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	I

CHAPITRE I.

Formes spéciales auxquelles peuvent se ramener les équations des mouvements des corps célestes.

1. Notations des diverses coordonnées.....	9
2. Loi du déplacement du plan de Hansen.....	10
3. Relations entre les angles θ , φ et les angles φ , ω , ψ , i	12
4. Équations des mouvements en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.....	13
5. Convention relative à la constante des forces vives.....	15
6. Convention relative au moment cinétique.....	16
7. Équations des mouvements en coordonnées de Laplace.....	16
8. Mouvement relatif dans le plan instantané de Hansen.....	19
9. Équations définitives en coordonnées de Hansen.....	22
10. Variation des constantes arbitraires par la méthode de M. Heinrich...	24

CHAPITRE II.

*Réduction des potentiels perturbateurs aux trois types : $\Omega(r, \sin^2 \varphi)$, $\Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta)$, $\Omega(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta, \sin n't, \cos n't)$.
Définition et valeur négative de la fonction L.*

11. Propriétés classiques du potentiel.....	27
12. Composantes de l'attraction.....	28
13. Classification des champs de forces.....	29
14. Choix des unités de longueur et de temps.....	34
15. Inégalité commune à tous les systèmes de masses possédant un équateur.....	34
16. Conséquence de l'inégalité précédente.....	35
17. Inégalité commune à toutes les valeurs moyennes (par rapport au temps) des potentiels considérés.....	36
18. Cas où les masses attirantes comprennent des anneaux de Gauss.....	40
19. Sens de la composante de l'attraction moyenne, suivant la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan méridien.....	44
20. Introduction des quantités négatives L et W.....	44

CHAPITRE III.

Champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur. Définition des fonctions S et Ψ .

	Pages.
21. Intégrale des aires. Simplification des équations différentielles.....	45
22. Solution périodique fondamentale.....	46
23. Changement d'inconnue dans l'équation différentielle en s	49
24. Définition des fonctions S et Ψ	50
25. Partie principale de S et ordre de grandeur des fonctions Ψ et Φ ...?	53
26. Expressions des fonctions S et Ψ dans quelques cas particuliers.....	55
27. Propriété importante de la fonction Ψ	57
28. Propriétés des fonctions S et Ψ dans tous les champs de gravitation fixes.....	59
29. Expression de Ψ quand U dépend périodiquement du temps.....	61

CHAPITRE IV.

Stabilité des trajectoires lorsque les forces dérivent du potentiel $U(r, \sin^2 \varphi)$.

30. Stabilité de Hill.....	63
31. Application aux mouvements dans le champ de forces :	
$U = \frac{r}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} \left(1 - 3 \sin^2 \varphi \right).$	65
32. Mouvement d'une étoile faisant partie d'un amas.....	70
33. Caractère oscillatoire du rayon vecteur dans les champs de forces $U(r, \sin^2 \varphi)$	73
34. Partie principale du grand axe de l'orbite.....	75
35. Stabilité à la Poisson.....	76
36. Intégration des équations du mouvement par approximations successives.....	77

CHAPITRE V.

Mouvements récurrents et orbites absolues. Leur représentation approchée.

37. Rôle des mouvements récurrents.....	82
38. Définition des orbites absolues.....	85
39. Domaines tridimensionnels des états de mouvement. Surfaces de section.....	86
40. Nature des mouvements récurrents dans les champs de forces ayant un axe de révolution et un équateur.....	88
41. Transformation des équations différentielles du mouvement par la méthode de M. Kryloff.....	92
42. Solution stationnaire des équations approchées.....	98
43. Variation des constantes β et γ . Solutions stationnaires exactes.....	100
44. Représentation asymptotique des mouvements récurrents.....	102
45. Quasi-périodicité relativement la longitude astronomique et au temps.....	105
46. Convergence des séries de Fourier de toutes les fonctions quasi-périodiques relatives aux orbites absolues.....	109

	Pages.
47. Passage du mouvement dans le plan méridien au mouvement dans l'espace.....	111
48. Résumé et conclusion du chapitre. Hiérarchie des mouvements récurrents.....	112

CHAPITRE VI.

Déplacement de la ligne des nœuds. Variation de l'inclinaison.

49. Variations de l'inclinaison et de la longitude du nœud, déduites des équations différentielles du mouvement.....	115
50. Rétrogradation des nœuds. Croissances comparées de la longitude orbitale et de la longitude équatoriale.....	117
51. Limites du déplacement de la ligne des nœuds pendant une révolution draconitique.....	118
52. Application aux orbites quasi-circulaires d'inclinaisons très faibles.....	120
53. Longitude du nœud sur une orbite absolue ordinaire.....	122
54. Existence d'un moyen mouvement sidéral, d'un moyen mouvement des nœuds et d'un moyen mouvement des apsides pour toutes les orbites stables à la Poisson.....	126
55. Oscillations de l'inclinaison.....	128
56. Variation de la fonction S du Chapitre III.....	131
57. Expression de la vitesse angulaire de la ligne des nœuds dans quelques cas simples.....	132
58. Déplacement de la ligne des nœuds considéré comme fonction de l'inclinaison lorsque celle-ci est très faible.....	134

CHAPITRE VII.

Solutions périodiques au voisinage du plan de l'équateur.

59. Existence des mouvements périodiques.....	137
60. Longueur des périodes. Solution exceptionnelle, à courte période, dans le champ d'attraction d'un amas stellaire.....	138
61. Réduction des équations canoniques à la forme de M. Birkhoff.....	141
62. Transformation $\mathfrak{S}$ de la surface de section.....	143
63. Points invariants après un nombre suffisamment grand d'itérations de la transformation $\mathfrak{S}$. Mouvements périodiques multiples du mouvement $z = 0$	144
64. Mouvements limite-périodiques.....	146

CHAPITRE VIII.

Excentricité des trajectoires. Variation des apsides.

65. Méthode pour l'étude des oscillations du rayon vecteur.....	148
66. Application aux mouvements quasi-périodiques. Excentricité moyenne d'une orbite absolue.....	150
67. Cas des orbites périodiques du plan de l'équateur.....	156
68. Influence de l'anneau de Saturne sur le déplacement des apsides de ses corpuscules.....	160
69. Autre méthode pour étudier les oscillations du rayon vecteur.....	165
70. Convention relative à l'excentricité, lorsque l'inclinaison est différente de zéro.....	167

	Pages.
71. Sens du déplacement de la ligne des apsides dans le plan orbital. Expression approchée de ce déplacement.....	168
72. Application à quelques cas simples.....	171
73. Déplacement des apsides quand le plan de référence est le plan de l'équateur. Exemples.....	174

CHAPITRE IX.

*Champs d'attraction avec des anneaux elliptiques de Gauss.
Révolution ou libration des périhélies. Orbites absolues.*

74. Équations différentielles effectuant la variation des constantes lorsqu'on remplace l'attraction d'un anneau circulaire de Gauss par celle d'un anneau elliptique.....	180
75. Convention relative aux excentricités des planètes et des satellites....	183
76. Mouvements quasi-périodiques dans les champs de gravitation du type $U = \frac{1}{r} + \varepsilon \Omega(r, \sin^2 \varphi) + \varepsilon e' \Omega'(r, \sin^2 \varphi, \sin \theta, \cos \theta)$	184
77. Retard des nœuds. Extension des résultats du Chapitre VI.....	189
78. Cas des orbites presque circulaires d'inclinaisons très faibles.....	192
79. Extension des résultats du Chapitre VIII. Avance du périhélie quand l'excentricité de la planète dans son mouvement non troublé est plus importante que celle de l'anneau perturbateur.....	194
80. Libration possible du périhélie quand l'excentricité propre de la planète est aussi faible ou plus faible que l'excentricité de l'anneau perturbateur.....	200
81. Application aux orbites d'inclinaison nulle et d'excentricité très faible.	202
82. Déplacements des périhélies des astéroïdes sous l'action de Jupiter....	204

CHAPITRE X.

*Cas où le potentiel est une fonction périodique du temps.
Modifications apportées aux déplacements des nœuds et des
apsides. Orbites absolues et orbites réelles.*

83. Étude des orbites faiblement excentriques et faiblement inclinées, quand la fonction perturbatrice est sinusoïdale par rapport au temps.	212
84. Conséquences relatives aux déplacements des nœuds et des apsides. Application à la Lune.....	218
85. Déplacement de la ligne des apsides lorsque le moyen mouvement de la planète troublée présente une commensurabilité approchée simple avec le moyen mouvement de la planète troublante.....	221
86. Solutions quasi-périodiques approchées et réelles, obtenues à partir d'une solution périodique dans un champ de gravitation fixe.....	223
87. Solutions quasi-périodiques approchées et réelles, obtenues à partir d'une ellipse képlérienne, ou à partir d'une solution périodique du problème restreint des trois corps.....	228
88. Autres solutions formellement ou réellement quasi-périodiques.....	231
89. Considérations sur les lacunes dans la région des astéroïdes.....	232
CONCLUSION.....	233



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Variations de la densité à l'intérieur de la Terre.

Vu et approuvé :

Paris, le 3 décembre 1937.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 3 décembre 1937.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

109109 — Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, 55.

109109
